Eléments d'Analyse Fonctionnelle

Notes de cours

Université Claude Bernard Lyon 1

Licence de mathématiques troisième année

Parcours Mathématiques générales et applications

Petru Mironescu

2026–2027

Chapitre 10

Espaces L^p

10.0 Aperçu

Nous avons déjà vu l'importance des fonctions intégrables (autrement dit : des fonctions mesurables telles que $\int |f|\, d\mu < \infty$), par exemple comme majorantes dans le théorème de convergence dominée. Dans le langage probabiliste, une fonction intégrable est une fonction f qui a une *espérance* $\mathbb{E}(f) := \int f\, dP$ finie. Une autre quantité importante est la *variance* $\mathrm{Var}(f) := \int (f - \mathbb{E}(f))^2\, dP$, qui est finie à condition que $\int f^2\, dP$ soit finie.

D'autres conditions similaires jouent un rôle important : par exemple, la condition $\int |f|^3\, dP < \infty$ intervient dans l'étude de la vitesse de convergence dans le *théorème central limite* ; la condition $\int |f|^p\, dP < \infty$, avec $1 < p < 2$, pour la validité du théorème central limite, etc.

Nous allons présenter ici un « chapeau » commun à toutes ces propriétés, qui est celui des *espaces de Lebesgue* $\mathscr{L}^p$, avec $1 \leq p < \infty$:

$$\mathscr{L}^p := \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}}\,;\ f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p} := \left(\int |f|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

La définition de l'espace $\mathscr{L}^\infty$ fait intervenir une nouvelle notion, celle de $\sup$ *essentiel*, qui est un $\sup$ adapté à la théorie de l'intégration, donc ne tenant pas compte des ensembles négligeables.

Les espaces $\mathscr{L}^p$ sont des espaces vectoriels, et $f \mapsto \|f\|_{L^p}$ vérifie l'inégalité tri-

angulaire, mais n'est pas une norme. Nous allons pallier ce défaut en définissant des cousins des espaces $\mathscr{L}^p$, les espaces L^p ; la définition est conceptuellement compliquée, mais concrètement facile à maîtriser.

Ces espaces sont des espaces normés par $\| \ \|_{L^p}$ (inégalité de Minkowski, théorème 10.26) et complets (théorème de Fatou 10.28).

L'autre notion importante de ce chapitre est celle d'*exposant conjugué* : si $1 \leq p \leq \infty$, le *conjugué* de p est le nombre $1 \leq q \leq \infty$ défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

L'*inégalité de Hölder* (théorème 10.18) affirme que, si $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$, avec p et q conjugués, alors fg est intégrable et

$$\left| \int fg \right| \leq \int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^q}.$$

L'*inégalité de Cauchy-Schwarz* s'obtient en prenant $p = q = 2$ dans l'inégalité de Hölder.

Dans la section 10.4, qui est une section « pour aller plus loin », nous énonçons le *théorème de représentation de Riesz* 10.32, qui, de manière informelle, montre que l'inégalité de Hölder est la seule inégalité possible dans les espaces $\mathscr{L}^p$ avec $1 < p < \infty$. Une preuve de ce théorème, inspirée par l'approche originelle de Riesz, est présentée dans la section « pour aller encore plus loin » 14.5. Cette preuve a laissé, dans les cours de master, la place à une preuve due à von Neumann, qui, pour fonctionner, nécessite l'hypothèse *superflue* que la mesure ambiante est σ-finie. Vous allez voir la preuve de von Neumann dans le cours d'analyse fonctionnelle.

Dans tout le chapitre, $(X, \mathscr{T}, \mu)$ *est un espace mesuré* fixé. f, g, etc. : $X \to \overline{\mathbb{R}}$ *sont des fonctions mesurables*. Même sans mention explicite, la mesurabilité des fonctions concernées est assumée dans chaque énoncé. Le p. p. est relatif à la mesure μ.

Compétences minimales attendues.

a) Décider si une fonction « concrète » appartient à un espace $\mathscr{L}^p$.
b) Comprendre la différence entre $\mathscr{L}^p$ et L^p.
c) Comprendre la définition de $\mathscr{L}^\infty$.
d) Savoir montrer qu'un objet est bien défini pour une classe $f \in L^p$.
e) Savoir utiliser les inégalités de Hölder et Minkowski.
f) Savoir utiliser le théorème de Fatou et son corollaire. ◇

10.1 $\mathscr{L}^p$ versus L^p

Dans cette section, nous définissons les *espaces de Lebesgue* $\mathscr{L}^p$ et L^p et donnons quelques éléments pour comprendre les règles de calcul dans L^p. Rappelons que nous travaillons dans $(X, \mathscr{T}, \mu)$, et que toutes les fonctions sont supposées $\mathscr{T}$-mesurables.

10.1 Définition (Espaces de Lebesgue $\mathscr{L}^p$).

a) Si $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int |f|^p\right)^{1/p} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

b) Si $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{esssup} |f| := \min\{M \in \overline{\mathbb{R}};\ |f(x)| \leq M \text{ p. p.}\}.$$

c) Si $1 \leq p \leq \infty$, $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(X, \mu) := \{f : X \to \overline{\mathbb{R}};\ \|f\|_{L^p} < \infty\}$.

10.2 Notation. Une notation alternative, très répandue, pour les normes $\| \ \|_{L^p}$ est $\| \ \|_p$. ◇

10.3 Remarques.

a) Cette notation est cohérente avec les notations des normes usuelles dans $\mathbb{R}^n$: si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et si nous identifions x à une fonction $f : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$, alors $\|x\|_p = \|f\|_{L^p}$, où la seconde norme est calculée par rapport à la mesure de comptage sur $\{1, \dots, n\}$.

b) Attention toutefois au risque suivant de confusion : si $f : X \to \mathbb{R}$, $\|f\|_\infty$ peut désigner, selon le contexte, soit $\sup |f|$, soit $\operatorname{esssup} |f|$. ◇

10.4 Définition (Espaces de Lebesgue L^p).

a) $L^p = L^p(X, \mu) := \mathscr{L}^p / \sim$. Ici, $\sim$ est l'équivalence $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ p. p.

b) Si $f \in L^p$, alors nous posons $\|f\|_{L^p} := \|g\|_{L^p}$, où g est une fonction arbitraire de la classe d'équivalence définissant f.

10.5 Remarques.

a) $\sim$ est en effet une relation d'équivalence ; voir l'exercice 4.22.

b) La définition $\|f\|_{L^p} := \|g\|_{L^p}$ est correcte, au sens où $\|g\|_{L^p}$ ne dépend pas du choix de g dans la classe de f ; voir l'exercice voir l'exercice # 11 de la feuille # 7. En particulier, ceci implique que, si $g \in \mathscr{L}^p$ et $h \sim g$, alors $h \in \mathscr{L}^p$.

c) Voici une conséquence de l'item b). Considérons $\mathscr{M} / \sim$, avec $\mathscr{M} := \{g : X \to \overline{\mathbb{R}};\ g \text{ mesurable}\}$. Nous avons alors la définition équivalente de L^p :

$$L^p := \{f \in \mathscr{M} / \sim ;\ f \text{ est une classe d'équivalence telle que } \|f\|_{L^p} < \infty\}.$$

d) Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p$, alors la proposition 6.48 (appliquée à $|f|^p$) et la remarque 6.47 montrent qu'il existe, dans la classe d'équivalence de f, une fonction g finie *partout*.

e) Si $f \in \mathscr{L}^\infty$, soit $A := \{x \in X\,;\, |f(x)| > \operatorname{esssup} f\}$. Alors $A \in \mathscr{T}$ est négligeable, d'où $g = f\,\chi_{A^c}$ est dans la classe de f. Notons que g est, par construction, bornée, en particulier finie *partout*.

f) Ainsi, lorsque nous travaillons avec une classe de L^p, nous pouvons toujours trouver dans celle-ci un représentant fini *partout* (et, si $p = \infty$, borné).

g) En particulier, si $f, g \in L^p$ alors nous pouvons définir la classe $f + g$ comme celle de $f_1 + g_1$, avec f_1 (respectivement g_1) dans la classe de f (respectivement g) finie partout. Dans l'esprit de la remarque 10.7 qui suit, la classe $f + g$ obtenue ne dépend pas du choix de f_1 et g_1 ; voir l'exercice # 11 de la feuille # 7. ◇

10.6 Notation. Par abus de notation, et bien qu'un élément de L^p soit une classe d'équivalence et non pas une fonction, nous écrivons

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}, \text{ si } 1 \leq p < \infty.$$

Le sens de cette égalité est que pour tout représentant g de f, l'égalité précédente est vraie si nous remplaçons à droite f par g.

Abus de notation analogue dans L^∞. ◇

Nous continuons par deux remarques essentielles pour comprendre, d'une part, le sens des énoncés concernant les espaces L^p, d'autre part, la façon de définir les opérations dans les espaces L^p.

10.7 Remarque. Lorsqu'il s'agit d'une propriété des espaces L^p, la première question à se poser est si sa preuve (qui fait intervenir des fonctions, et non pas des classes) est indépendante du choix de la fonction dans la classe d'équivalence.

Illustration pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$ (théorème 10.18 avec $p = q = 2$). La première étape de la preuve de cette inégalité consiste à montrer que

$$\int |f_1\, g_1| \leq \left(\int |f_1|^2\right)^{1/2} \left(\int |g_1|^2\right)^{1/2}, \ \forall\, f_1, g_1 : X \to \mathbb{R}. \tag{10.1}$$

En prenant, dans (10.1), f_1 dans la classe de f et g_1 dans la classe de g, nous obtenons

$$\int |f_1\, g_1| \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

Pour compléter la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il suffit alors

de montrer que $f_1\, g_1$ est dans la classe de $f\, g$; or, ceci découle de l'exercice 10.11 b).

La remarque suivante montre que l'espace $L^p(X, \overline{\mu})$ n'est pas, dans un sens à préciser, plus riche que l'espace $L^p(X, \mu)$.

10.8 Remarque. Nous pouvons identifier *de manière naturelle* les classes d'équivalence des fonctions $\mathscr{T}$-mesurables et $\overline{\mathscr{T}}$-mesurables. En effet, soit $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable. Alors (proposition 4.19 a)) il existe une fonction $\mathscr{T}$-mesurable $g_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que $f_1 = g_1$ μ-p. p. (ou, ce qui est équivalent, telle que $f_1 = g_1$ $\overline{\mu}$-p. p.).

Notons : f la classe de f_1 par rapport à $(X, \overline{\mathscr{T}}, \overline{\mu})$, g la classe de g_1 par rapport à $(X, \overline{\mathscr{T}}, \overline{\mu})$, G la classe de g_1 par rapport à $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Par choix de g_1, nous avons $f = g$. Par ailleurs, nous avons $G \subset g$ (vérifier). L'application $f \mapsto G$ est bien définie et bijective, de réciproque $G \mapsto g$ (vérifier).

Cette identification naturelle s'étend aux espaces L^p : si $f_1 \in \mathscr{L}^p(X, \overline{\mu})$, alors les classes respectives satisfont $f \in L^p(X, \overline{\mu})$ et $G \in L^p(X, \mu)$, ce qui donne une bijection naturelle, $f \mapsto G$, entre $L^p(X, \overline{\mu})$ et $L^p(X, \mu)$. Cette bijection préserve la norme : $\|f\|_{L^p(X,\overline{\mu})} = \|G\|_{L^p(X,\mu)}$ (vérifier).

En particulier, nous pouvons identifier $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$ à $L^p(\mathbb{R}^n, \nu_n)$. ◇

Exercices

Cet exercice donne quelques propriétés simples de $\| \ \|_{L^p}$. L'item d) est particulièrement important de point de vue théorique.

10.9 Exercice.

a) $\|tf\|_p = |t|\, \|f\|_p$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (avec la convention $0 \cdot \infty = 0$).

b) Si $f = g$ sont finies et égales p. p., alors $\|f - g\|_p = 0$ et $\|f\|_p = \|g\|_p$.

c) $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $f = 0$ p. p.

d) La définition de $\|f\|_\infty$ est correcte, au sens suivant. Soit $A := \{M \in [0, \infty] \,;\, |f(x)| \leq M \text{ p. p.}\}$. Alors A est non vide et A a un plus petit élément, m. Cet m est le plus petit nombre C de $[0, \infty]$ avec la propriété $|f(x)| \leq C$ p. p.

e) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pour $p = 1$ et $p = \infty$. (Ici, $f, g : X \to \mathbb{R}$.) ◇

La définition de $\| \ \|_{L^\infty}$ est assez absconse. L'exercice suivant donne un cas où $\|f\|_{L^\infty} = \sup |f|$.

10.10 Exercice. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}_U$. Si $f \in C(U)$, montrer que $\|f\|_{L^\infty} = \sup\limits_U |f|$. ◇

L'exercice suivant montre que la relation $\sim$ « commute » avec les opérations sur les fonctions.

10.11 Exercice. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Nous considérons des fonctions $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (pas nécessairement mesurables). Montrer que la relation d'équivalence « $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ p. p. » a les propriétés suivantes.

a) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f + t\,g \sim f_1 + t\,g_1$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (à condition que les fonctions soient finies en tout point).
b) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f\,g \sim f_1\,g_1$.
c) Si $f \sim g$ et si $\Phi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, alors $\Phi \circ f \sim \Phi \circ g$.
d) Dans cette question, $X := \mathbb{R}^n$ et $\mu := \lambda_n$. Soit $\tau_h f(x) := f(x - h)$, $\forall\, x, h \in \mathbb{R}^n$. Si $f \sim g$, alors $\tau_h f \sim \tau_h g$, $\forall\, h$. ◇

Dans le même esprit, nous mentionnons la propriété suivante, utilisée dans la définition du produit de convolution (dans le chapitre 11).

10.12 Exercice. Nous munissons $\mathbb{R}^n$ de la mesure de Lebesgue. Soient $f, g, f_1, g_1 : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, avec $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $h \sim h_1$, où

$$h(y) = f(x - y)\,g(y),\ h_1(y) = f_1(x - y)\,g_1(y),\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n. \qquad \diamond$$

L'exercice suivant introduit des espaces *très importants*, les *espaces* ℓ^p.

10.13 Exercice (Espaces ℓ^p)**.** Si μ est la mesure de comptage, alors l'égalité p. p. équivaut à l'égalité. Ainsi, la classe d'équivalence de g est $\{g\}$. Nous pouvons donc identifier naturellement $\mathscr{L}^p$ et L^p, par la bijection $g \mapsto \{g\}$.

Si $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, alors nous définissons

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) := \mathscr{L}^p = L^p,\ \forall\, 1 \leq p \leq \infty.^{\dagger}$$

a) Si $(a_n)_n$ est une suite indexée sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\|(a_n)_n\|_{\ell^p} = \begin{cases} \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup_n |a_n|, & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

b) Montrer que si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset \ell^\infty$. De plus, ces inclusions sont « continues » : si $1 \leq p \leq r \leq \infty$, alors $\|(a_n)_n\|_{\ell^r} \leq \|(a_n)_n\|_{\ell^p}$.
c) Soit $(a_n)_n \in \ell^p$, avec $p < \infty$. Montrer que pour tout $r > p$ nous avons $\lim_{s \to r} \|(a_n)_n\|_{\ell^s} = \|(a_n)_n\|_{\ell^r}$.
d) Si $1 \leq r < \infty$ et $(a_n)_n$ est une suite arbitraire, alors $\lim_{s \searrow r} \|(a_n)_n\|_{\ell^s} = \|(a_n)_n\|_{\ell^r}$. ◇

Cet exercice est une suite « concrète » de la remarque « abstraite » 10.8.

10.14 Exercice.

a) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_n, \lambda_n)$. Montrer que toute classe d'équivalence contient un représentant borélien.
b) Même propriété si à la place de $\mathbb{R}^n$ nous considérons une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$.

[†] Nous définissons de même $\ell^p(A)$, avec A a. p. d.

c) Généralisation ? ◇

Un autre exercice *fondamental*. Nous le commenterons à sa fin.

10.15 Exercice. Nous supposons μ *finie*.

a) Montrer que si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $L^\infty \subset L^{p_2} \subset L^{p_1} \subset L^1$.

b) Soit $f \in L^p$, avec $p > 1$. Montrer que pour tout $1 \leq r < p$ nous avons $\lim_{s \to r} \|f\|_{L^s} = \|f\|_{L^r}$. ◇

10.16 Remarque (Inclusions entre les espaces L^p)**.** *En général*, il n'y a pas de relation d'inclusion entre L^p et L^q, avec $p \neq q$: nous n'avons pas $L^p \subset L^q$.

Il existe deux *exceptions notables*.

a) Si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset \ell^\infty$.

Les espaces ℓ^p croissent avec p.

b) Si μ est finie et $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $L^1 \supset L^{p_1} \supset L^{p_2} \supset L^\infty$.

Si μ est finie, les espaces L^p décroissent avec p.

Pour l'item a), voir l'exercice 10.13 b) ; pour l'item b), l'exercice 10.15 a).

10.2 L'inégalité de Hölder

Cette section est dédiée à la preuve de l'*inégalité de Hölder* et à deux de ses « réciproques » qui montrent que cette inégalité ne peut être améliorée. La première « réciproque », la proposition 10.19, servira dans la preuve de l'inégalité de Minkowski dans la section 10.3 ; elle intervient dans de nombreuses preuves « par dualité » en analyse fonctionnelle. La deuxième « réciproque », la proposition 10.20, intervient également dans des preuves d'analyse plus avancée, comme celle du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.

Commençons par une définition essentielle dans ce contexte.

10.17 Définition (Exposants conjugués)**.** Les nombres $p, q \in [1, \infty]$ sont *conjugués* (ou *exposants conjugués*) si et seulement si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.[†‡]

10.18 Théorème (Inégalité de Hölder)**.** Si p, q sont conjugués, alors

$$\|f\, g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}, \ \forall\, f, g \text{ (inégalité de Hölder)} . \tag{10.2}$$

[†]Notons que nous ne pouvons pas avoir en même temps $p = \infty$ et $q = \infty$. Si, par exemple, $p < \infty$, alors $q = p/(p-1)$. Si nous avons en même temps $q < \infty$, alors, par symétrie, $p = q/(q-1)$.

[‡]q est désigné comme le conjugué de p (et réciproquement).

En particulier, nous avons

$$\|f\,g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}\,\|g\|_{L^2},\ \forall\, f, g \text{ (\textit{inégalité de Cauchy-Schwarz})}\,. \tag{10.3}$$

Les inégalités s'entendent pour des fonctions ou pour des classes d'équivalence.

10.19 Proposition (Formule de dualité L^p–L^q (I))**.** Soient p, q exposants conjugués.

a) Si $1 \leq p < \infty$, alors nous avons

$$\|f\|_{L^p} = \sup\left\{\int f\,g\,;\ g \in \mathscr{L}^q,\ \|g\|_{L^q} \leq 1\right\},\ \forall\, f \in \mathscr{L}^p. \tag{10.4}$$

De plus, nous pouvons remplacer dans (10.4) le $\sup$ par $\max$ et considérer uniquement des fonctions g telles que $f\,g \geq 0$.

b) Si μ est σ-finie, alors l'égalité (10.4) reste vraie pour $p = \infty$. ◇

10.20 Proposition (Formule de dualité L^p–L^q (II))**.** Soient p, q exposants conjugués.

Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que $f\,g$ soit intégrable pour tout $g \in \mathscr{L}^q$.

a) Si $p = 1$, alors $f \in \mathscr{L}^1$.

b) Si μ est σ-finie et $1 < p \leq \infty$, alors $f \in \mathscr{L}^p$.

En particulier, sous ces hypothèses nous avons (10.4). ◇

Exercices

L'inégalité suivante, classique, sert dans la preuve de l'inégalité de Hölder. Elle généralise l'inégalité élémentaire $a^2 + b^2 \geq 2\,ab$.

10.21 Exercice (Inégalité de Young)**.** Soient $1 < p, q < \infty$ exposants conjugués. Montrer que

$$a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ \forall\, a, b \in [0, \infty[. \tag{10.5}$$

Indication. Étudier, pour b fixé, la fonction $a \mapsto \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} - ab$. ◇

L'inégalité de Hölder a des variantes à plus de deux facteurs.

10.22 Exercice. Soient $k \geq 2$ et $1 \leq p_1, p_2, \ldots, p_k \leq \infty$ tels que $\sum_{j=1}^k 1/p_j = 1$. Montrer que

$$\|f_1 f_2 \ldots f_k\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}}\,\|f_2\|_{L^{p_2}} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}},\ \forall\, f_1, f_2, \ldots, f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}.$$ ◇

Nous savons déjà que, si μ est *finie*, alors $L^r \subset L^p$ si $p < r$. L'exercice qui suit donne permet d'*estimer*[†] $\|f\|_{L^p}$ en fonction de $\|f\|_{L^r}$.

10.23 Exercice. Nous supposons μ finie. Si $1 \leq p \leq r \leq \infty$, alors

$$\|f\|_{L^p} \leq (\mu(X))^{1/p-1/r} \|f\|_{L^r}, \ \forall f.$$

Ceci implique en particulier la conclusion de l'exercice 10.15 a). ◇

L'inégalité qui suit est un exemple simple d'*inégalité d'interpolation*.[‡]

10.24 Exercice. Soient $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$.

a) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0,1[$ tel que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_0} + \dfrac{q-\theta}{p_1}$.

b) Montrer que $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|^{\theta}_{L^{p_0}} \|f\|^{1-\theta}_{L^{p_1}}, \forall f$. ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 10.18. Il suffit de travailler avec des fonctions (voir la remarque 10.7). Nous pouvons supposer que $0 < \|f\|_{L^p} < \infty$ et $0 < \|g\|_{L^q} < \infty$ (justifier). Dans ce cas, nous avons $|f| < \infty$ p. p. et $|g| < \infty$ p. p. (justifier) et donc nous pouvons travailler avec des fonctions finies en tout point (voir également la remarque 6.47).

Si $p = 1$ et $q = \infty$, nous devons montrer que $\displaystyle\int |f\,g| \leq \operatorname{esssup} |g| \int |f|$, qui est vraie (vérifier). Argument similaire si $p = \infty$ et $q = 1$.

Supposons maintenant que $1 < p, q < \infty$. Pour $A \in]0,\infty[$, l'inégalité de Young donne

$$|f(x)\,g(x)| = [A\,|f(x)|]\,[A^{-1}\,|g(x)|] \leq \frac{A^p\,|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{A^q\,q}, \ \forall x \in X. \tag{10.6}$$

En intégrant (10.6), nous obtenons

$$\int |f\,g| \leq \frac{A^p}{p}\|f\|^p_{L^p} + \frac{1}{A^q\,q}\|g\|^q_{L^q}. \tag{10.7}$$

En choisissant, dans (10.7), la valeur de A qui minimise le membre de droite de (10.7), à savoir

$$A = \frac{\|g\|^{q/(p+q)}_{L^q}}{\|f\|^{p/(p+q)}_{L^p}},$$ §

nous obtenons (10.2) (vérifier). CQFD

[†] *Estimer* : donner un ordre de grandeur. En analyse, le sens est plutôt : *majorer*.

[‡] Du verbe *interpoler*, utilisé en *philologie* : « introduire un texte dans une œuvre à laquelle il n'appartient pas ». En *mathématiques*, l'un des sens est : « intercaler des valeurs ou des termes intermédiaires dans une série de valeurs ou de termes connus ». En analyse, l'interpolation consiste à estimer (donc majorer) des valeurs d'une fonction à partir de deux valeurs connues. Dans notre cas, nous *connaissons* $\|f\|_{L^{p_0}}$ et $\|f\|_{L^{p_1}}$, et nous *estimons* $\|f\|_{L^p}$.

§ Faire une étude de fonction pour justifier ce choix de A.

Démonstration de la proposition 10.19. L'inégalité de Hölder implique « $\geq$ » dans (10.4). Il suffit donc d'établir « $\leq$ ».

a) Soit d'abord $p = 1$. Soit $g := \operatorname{sgn} f$.[‡] Alors $\|g\|_{L^\infty} \leq 1$ et $\int f\, g = \|f\|_{L^1}$ (vérifier).

Soit maintenant $1 < p < \infty$. Si $\|f\|_{L^p} = 0$, la conclusion est claire. Supposons $\|f\|_{L^p} > 0$. Soit $h(x) := |f(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} f(x)$. Alors h est mesurable et $\|h\|_{L^q} = \|f\|_{L^p}^{p-1}$ (vérifier). Soit $g := h/\|h\|_{L^q}$, de sorte que $\|g\|_{L^q} = 1$. Nous avons

$$\int f\, g = (1/\|h\|_{L^q}) \int |f|^p = \|f\|_{L^p}.$$

b) Supposons $M := \|f\|_{L^\infty} > 0$, sinon la conclusion est claire. Soit $(X_n)_n$ une suite croissante telle que $X_n \nearrow X$ et $\mu(X_n) < \infty$, $\forall\, n$. Soit $0 < \varepsilon < M$ et soit

$$A = A_\varepsilon := \{x \in X\,;\, |f(x)| \geq M - \varepsilon\}.$$

Nous avons $\mu(A) > 0$ (justifier). Soit $h_n := \chi_{A \cap X_n} \operatorname{sgn} f$, qui satisfait $\|h_n\|_{L^1} = \mu(A \cap X_n)$ (vérifier). Par théorème de la suite croissante, pour n suffisamment grand nous avons $\mu(A \cap X_n) > 0$. Pour un tel n, posons $g_n := h_n/\mu(A \cap X_n)$, de sorte que $\|g_n\|_{L^1} = 1$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \sup\left\{\int f\, g\,;\, g \in \mathscr{L}^1,\ \|g\|_{L^1} \leq 1\right\} &\geq \int f\, g_n \\ &= \frac{1}{\mu(A \cap X_n)} \int_{A \cap X_n} |f| \geq M - \varepsilon. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Nous concluons en faisant $\varepsilon \to 0$ dans (10.8). CQFD

La preuve de la proposition 10.20 repose sur le résultat auxiliaire suivant.

10.25 Lemme. Soient $1 < p, q < \infty$ exposants conjugués.

Soit $(a_k)_k$ une suite de nombres réels positifs telle que $\sum_k (a_k)^p = \infty$.

Alors il existe une suite $(\alpha_k)_k$ de nombres réels positifs telle que $\sum_k (\alpha_k)^q < \infty$ et $\sum_k a_k\, \alpha_k = \infty$. ◇

De manière équivalente : si $(a_k)_k \notin \ell^p$, alors la série $\sum_k a_k\, \alpha_k$ ne peut pas être convergente pour toute suite $(\alpha_k)_k \in \ell^q$.

Ainsi, le lemme 10.25 prouve (par contraposition) la proposition 10.20 dans le cas de la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

[‡]Rappelons la définition de la fonction « signe » : $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0. \\ -1, & \text{si } t < 0 \end{cases}$

Démonstration du lemme 10.25. Soient $0 = k_1 < k_2 < \cdots$ tels que

$$\left(\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (a_k)^p \right)^{1/p} := S_j \geq 1$$

(justifier l'existence des k_j). Le choix

$$\alpha_k := \frac{(a_k)^{p-1}}{j\,(S_j)^{p-1}},\ \forall\, j \geq 1,\ \forall\, k_j \leq k < k_{j+1} - 1,$$

donne une suite $(\alpha_k)_k$ avec les propriétés désirées. En effet, nous avons

$$\sum_k a_k\,\alpha_k = \sum_j \frac{1}{j\,(S_j)^{p-1}} \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (a_k)^p = \sum_j \frac{S_j}{j} \geq \sum_j \frac{1}{j} = \infty,$$

$$\sum_k (\alpha_k)^q = \sum_j \frac{1}{j^q\,(S_j)^p} \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (a_k)^p = \sum_j \frac{1}{j^q} < \infty. \qquad \text{CQFD}$$

Démonstration de la proposition 10.20.

a) Soit $g := \operatorname{sgn} f \in \mathscr{L}^\infty$. Nous avons $\displaystyle\int |f| = \int f\,g < \infty$, et donc $f \in \mathscr{L}^1$.

b) Supposons, par l'absurde, que $f \notin \mathscr{L}^p$. Pour un tel f, nous allons construire une fonction $g \in \mathscr{L}^q$ telle que $f\,g \geq 0$ et $\displaystyle\int f\,g = \infty$ – ce qui constitue la contradiction recherchée.

Étape 1. Construction de g si $1 < p < \infty$ et μ est finie. Soit $B := \{x \in X\,;\, |f(x)| = \infty\}$. Si $\mu(B) > 0$, alors $g := \operatorname{sgn} f\,\chi_B$ convient. Ainsi, nous pouvons supposer que $\mu(B) = 0$, ce qui revient à $|f| < \infty$ p. p. Nous pouvons donc supposer f finie *partout* (justifier).

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Posons $A_k := \{x \in X\,;\, 2^k \leq |f(x)| < 2^{k+1}\}$, de sorte que les A_k sont d. d. d. et $f = 0$ sur $X \setminus \sqcup_k A_k$. Soit $f_k := f\,\chi_{A_k}$. D'une part, nous avons

$$\|f_k\|_{L^p}^p = \int_{A_k} |f|^p \leq 2^{(k+1)p}\,\mu(A_k) < \infty,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{10.9}$$

D'autre part, nous avons

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|f_k\|_{L^p}^p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{A_k} |f|^p = \int_{\sqcup_{k=-\infty}^{\infty} A_k} |f|^p = \int_X |f|^p = \infty. \tag{10.10}$$

De (10.10), nous avons soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{L^p}^p = \infty$, soit $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{0} \|f_k\|_{L^p}^p = \infty$. Nous examinons le premier cas ; l'autre est similaire. Nous supposons donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{L^p}^p = \infty. \tag{10.11}$$

De (10.9) et de la preuve de la proposition 10.19 a), pour tout $k \geq 0$ il existe $g_k \in \mathscr{L}^q(A_k)$ telle que $\|g_k\|_{L^q(A_k)} = 1$, $f_k\, g_k \geq 0$ et $\displaystyle\int_{A_k} f_k\, g_k = \|f_k\|_{L^p(A_k)} = \|f_k\|_{L^p(X)}$.

Nous allons prendre g de la forme $g = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, g_k\, \chi_{A_k}$, avec $\alpha_k \geq 0$. Nous avons, par calcul direct,

$$\int |g|^q = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k)^q \int_{A_k} |g_k|^q = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k)^q,$$
$$\int f\, g = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_{A_k} f_k\, g_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, \|f_k\|_{L^p}.$$

Le lemme 10.25 combiné avec (10.11) montre que l'on peut trouver α_k tels que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|f_k\|_{L^p} = \infty \text{ et } \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k)^q < \infty.$$

Pour de tels α_k, g a toutes les propriétés désirées.

Étape 2. Construction de g si $1 < p < \infty$ et μ est σ-finie. Soit $(Y_n)_n \subset \mathscr{T}$ une suite d. d. d. telle que $X = \sqcup_n Y_n$ et $\mu(Y_n) < \infty$, $\forall\, n$. Notons f_n la restriction de f à Y_n, de sorte que f_n est mesurable et

$$\sum_n \int_{Y_n} |f_n|^p = \int_X |f|^p = \infty \tag{10.12}$$

(vérifier). Si $\displaystyle\int_{Y_n} |f_{n_0}|^p = \infty$ pour un n_0, alors, de l'étape précédente, il existe $g_n : Y_n \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\displaystyle\int_{Y_{n_0}} |g_{n_0}|^q < \infty$, $f_{n_0}\, g_{n_0} \geq 0$ et $\displaystyle\int_{Y_{n_0}} f_{n_0}\, g_{n_0} = \infty$. Dans ce cas, la fonction $g := g_{n_0}\, \chi_{Y_{n_0}}$ a les propriétés souhaitées.

Nous pouvons donc supposer que $\displaystyle\int_{Y_n} |f_n|^p < \infty$ pour tout n. De la preuve de la proposition 10.19 a), il existe $g_n \in \mathscr{L}^q(Y_n)$ telle que

$$\|g_n\|_{L^q} = 1,\ f_n\, g_n \geq 0 \text{ et } \int_{Y_n} f_n\, g_n = \|f_n\|_{L^p(Y_n)}.$$

Nous définissons $g := \sum_n \alpha_n\, g_n\, \chi_{A_n}$ avec $\alpha_n \geq 0$ à déterminer de sorte que $g \in \mathscr{L}^q$ et $\displaystyle\int f\, g = \infty$. Comme dans l'étape 1, ces propriétés sont vraies si nous choisissons (via le lemme 10.25), des α_n tels que $\sum_n \alpha_n \|f_n\|_{L^p(Y_n)} = \infty$ et $\sum_n (\alpha_n)^q < \infty$ (vérifier).

Étape 3. Construction de g si $p = \infty$ et μ est σ-finie. Soit $(Y_n)_n$ la suite de l'étape 2. Soit $B := \{x \in X\, ;\, |f(x)| = \infty\}$. Nous avons $\mu(B) = \sum_n \mu(B \cap Y_n)$ (justifier). Si $\mu(B) > 0$, alors $0 < \mu(B \cap Y_n) < \infty$ pour (au moins) un n. Pour un tel n, $g := \operatorname{sgn} f\, \chi_{B \cap Y_n}$ convient (vérifier). L'étape 3 est donc complétée si $\mu(B) > 0$.

Ainsi, nous pouvons supposer que $\mu(B) = 0$, d'où $|f| < \infty$ p. p. Posons $A_j = \{x \in X\,;\, j \leq |f(x)| < j+1\}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}^*$. Notons que les A_j sont d. d. d. Comme $f \notin \mathscr{L}^\infty$, il existe une infinité de j tels que $\mu(A_j) > 0$ (justifier). Soient $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k < \cdots$ tels que $\mu(A_{j_k}) > 0$, $\forall\, k \geq 1$. Soit f_k la restriction de f à A_{j_k}, de sorte que $f_k \in \mathscr{L}^\infty(A_{j_k})$. De la preuve de la proposition 10.19 b), il existe $g_k \in \mathscr{L}^1(A_{j_k})$ telle que $\|g_k\|_{L^1(A_{j_k})} = 1$, $f_k\, g_k \geq 0$ et

$$\int_{A_{j_k}} f_k\, g_k \geq (1/2)\, \|f_k\|_{L^\infty(A_k)} \geq (1/2)\, j_k \geq (1/2)\, k.$$

Si nous posons $g := \sum_{k\geq 1}(1/k^2)\, g_k\, \chi_{A_{j_k}}$, alors par calcul direct $\|g\|_{L^1} = \sum_{k\geq 1}(1/k^2) < \infty$ (d'où $g \in \mathscr{L}^1$) et

$$\int f\, g \geq \sum_{k\geq 1}(1/2k)^2\, \|f_k\|_{L^\infty} \geq \sum_{k\geq 1} \frac{j_k}{2k^2} \geq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k} = \infty. \qquad \text{CQFD}$$

10.3 Norme et complétude

Dans cette section, nous montrons que L^p est un *espace de Banach*, c'est-à-dire un *espace normé complet (théorème de Fatou 10.28)*, et en particulier que $\|\ \|_{L^p}$ *est une norme sur* L^p *(inégalité de Minkowski, théorème 10.26)*.

10.26 Théorème (Inégalité de Minkowski)**.**

a) Si $1 \leq p \leq \infty$, alors $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$, $\forall\, f, g$.

L'inégalité s'entend pour des fonctions finies en tout point ou pour des classes d'équivalence.

b) $(L^p, \|\ \|_{L^p})$ est un espace normé et $(\mathscr{L}^p, \|\ \|_{L^p})$ est un espace « semi-normé ».[†]

10.27 Corollaire. L'application $L^p \ni f \mapsto \|f\|_{L^p} \in \mathbb{R}$ est continue. ◇

10.28 Théorème (Théorème de Fatou)**.** L^p est un espace normé complet, $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$.[‡]

Le résultat suivant est la généralisation de la réciproque du théorème de convergence, théorème 7.5.

10.29 Corollaire. Si $f_n \to f$ dans $\mathscr{L}^p$, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ et une fonction $g \in \mathscr{L}^p$ telles que

a) $f_{n_k} \to f$ p. p.

[†]Un espace semi-normé est un espace vectoriel muni d'une « semi-norme ». Une semi-norme $x \mapsto \|x\|$ vérifie toutes les propriétés de la norme sauf éventuellement $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

[‡]Un espace normé complet est un « espace de Banach ». Donc L^p est un espace de Banach.

b) $|f_{n_k}| \leq g$ p. p. ◇

10.30 Proposition. Dans L^2,

$$< f, g >:= \int f\, g,\ \forall\, f, g \in L^2, \tag{10.13}$$

est un produit scalaire, et $\|f\|_{L^2} =< f, f >^{1/2}$.[†] ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 10.26. Nous pouvons travailler avec des fonctions finies en tout point (justifier).

a) Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ suivent de l'exercice 10.9 e). Nous pouvons donc supposer $1 < p < \infty$ et aussi $\|f\|_{L^p} < \infty$, $\|g\|_{L^p} < \infty$.

La fonction $t \mapsto \Phi(t) := |t|^p$ étant convexe,[‡] nous avons $\Phi((s+t)/2) \leq (\Phi(s) + \Phi(t))/2$, $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$, d'où $|s+t|^p \leq 2^{p-1}\,(|s|^p + |t|^p)$, $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$ (vérifier). Ceci implique $|f + g|^p \leq 2^{p-1}\,(|f|^p + |g|^p)$. En intégrant cette inégalité avec $f, g \in \mathscr{L}^p$, nous obtenons que $f + g \in \mathscr{L}^p$.

Comme $f + g \in \mathscr{L}^p$, nous pouvons appliquer la proposition 10.19 a). Avec q le conjugué de p, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^p} &= \sup\left\{\int (f+g)\,h\,;\ h \in \mathscr{L}^q, \|h\|_{L^q} \leq 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\int f\,h\,;\ h \in \mathscr{L}^q, \|h\|_{L^q} \leq 1\right\} + \sup\left\{\int g\,h\,;\ h \in \mathscr{L}^q, \|h\|_{L^q} \leq 1\right\} \\
&= \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

b) Les propriétés de (semi-)norme de $\|\ \|_{L^p}$ suivent de l'exercice 10.9. CQFD

10.31 Remarque. L'inégalité de Minkowski peut être montrée sans faire appel à la proposition 10.19 a). Il suffit d'adapter la preuve vue pour montrer l'inégalité triangulaire dans $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_p)$. Voir l'exercice # 17 de la feuille d'exercices # 7. ◇

Démonstration du corollaire 10.27. Ceci est vrai pour toute norme (car une norme est, d'après l'inégalité triangulaire, lipschitzienne de constante 1). CQFD

Démonstration du théorème 10.28. Nous pouvons travailler avec des fonctions (justifier).

Rappelons le principe suivant de preuve. Pour montrer qu'un espace métrique (en particulier, normé) est complet, il suffit de montrer que toute suite de Cauchy contient

[†] L^2 est donc un espace normé complet dont la norme provient d'un produit scalaire : c'est un « espace de Hilbert ».

[‡] Vérifier la convexité de la fonction Φ en étudiant la monotonie de sa dérivée.

une sous-suite convergente. Pour construire une telle sous-suite dans le cadre du théorème 10.28, nous reprenons essentiellement la preuve du théorème 7.5.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}^p$ et soit $(f_{n_k})_k$ une sous-suite telle que

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{L^p} \leq 2^{-k-1}, \ \forall\, k \geq 0.^{\dagger}$$

Supposons d'abord $1 \leq p < \infty$. Pour tout $k \geq 1$, posons

$$g_k := |f_{n_0}| + \sum_{j=0}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|.$$

La suite $(g_k)_k$ étant croissante, nous pouvons définir $g := \lim_k g_k$.

L'inégalité triangulaire et l'inégalité de Minkowski impliquent

$$|f_{n_k}| \leq g_k \leq g \text{ et } \|g_k\|_{L^p} \leq \|f_{n_0}\|_{L^p} + 1. \tag{10.14}$$

Le théorème de convergence monotone et la deuxième partie de (10.14) donnent $\|g\|_{L^p} < \infty$. Nous avons en particulier $g(x) < \infty$ p. p. Si x est tel que $g(x) < \infty$, alors

$$|f_{n_0}(x)| + \sum_{j\geq 0} |(f_{n_{j+1}} - f_{n_j})(x)| = g(x) < \infty.$$

Il s'ensuit que pour un tel x la série $f_{n_0}(x) + \sum_{j\geq 0}((f_{n_{j+1}} - f_{n_j})(x))$ converge vers un $f(x)$ tel que $|f(x)| \leq g(x)$ (justifier). Les sommes partielles de la série étant $(f_{n_k}(x))_k$, nous obtenons $f_{n_k}(x) \to f(x)$ et $|f_{n_k}(x)|^p \leq (g(x))^p$. Pour les autres x, nous définissons $f(x) = 0$.

De ce qui précède, nous avons $f \in \mathscr{L}^p$. Le théorème de convergence dominée (variante p. p.) donne $\int |f_{n_k} - f|^p \to 0$, d'où $f_{n_k} \to f$ dans $\mathscr{L}^p$.

Enfin, supposons $p = \infty$. Soit $B \in \mathscr{T}$ négligeable tel que f_{n_0} soit bornée sur $X\backslash B$. Soit $A_k \in \mathscr{T}$ un ensemble négligeable tel que $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq 2^{-k-1}$ dans $X\backslash A_k$. Soit $A := B \cup \cup_k A_k \in \mathscr{T}$, qui est encore négligeable. Sur $X\backslash A$, f_{n_0} est bornée et la suite $(f_{n_k})_k$ est de Cauchy pour la norme uniforme. Elle converge donc uniformément vers une fonction bornée f. En posant $f(x) = 0$ si $x \in A$, nous avons $f \in \mathscr{L}^\infty$ et $f_{n_k} \to f$ dans $\mathscr{L}^\infty$ (vérifier). CQFD

Démonstration du corollaire 10.29. $(f_n)_n$ étant une suite de Cauchy, si $1 \leq p < \infty$ le corollaire découle de la preuve du théorème 10.28.

Si $p = \infty$, a) découle de la preuve du théorème 10.28, et pour b) nous pouvons prendre $g := \sup_n \|f_n\|_{L^\infty}$. CQFD

Démonstration de la proposition 10.30. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que $< f, g >$ est bien défini. La linéarité dans chaque variable et la symétrie étant évidentes, il suffit de vérifier que $< f, f >= 0 \Rightarrow f = 0$. Ceci découle de la dernière égalité de l'énoncé, qui est claire. CQFD

†La suite de la preuve est similaire si, à la place des 2^{-k-1}, nous choisissons des $\alpha_k \subset]0, \infty[$ tels que $\sum \alpha_k < \infty$.

10.4 Pour aller plus loin

Soient p, q exposants conjugués. Si $g \in L^q$, alors l'inégalité de Hölder montre que l'application

$$T : L^p \to \mathbb{R},\ T(f) := \int f\, g,\ \forall\, f \in L^p, \tag{10.15}$$

est linéaire, continue et de norme $\leq \|g\|_{L^q}$.

Si $1 < p \leq \infty$, la proposition 10.19 (appliquée à $\|g\|_{L^q}$) montre que la norme de T est égale à $\|g\|_{L^q}$. De même pour $p = 1$, si μ est σ-finie.

Le résultat suivant montre que (10.15) donne *toutes les applications linéaires et continues* $T : L^p \to \mathbb{R}$.

10.32 Théorème (Théorème de représentation de Riesz)**.** Soit $T : L^p \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue.

a) Si $1 < p < \infty$, alors il existe $g \in L^q$ telle que

$$T(f) = \int f\, g,\ \forall\, f \in L^p. \tag{10.16}$$

De plus, la norme de T est $\|g\|_{L^q}$.

b) Si $p = 1$ et μ est σ-finie, alors il existe $g \in L^\infty$ telle que

$$T(f) = \int f\, g,\ \forall\, f \in L^1. \tag{10.17}$$

De plus, la norme de T est $\|g\|_{L^\infty}$.

Le théorème ne mentionne pas L^∞ : les applications linéaires et continues sur L^∞ sont connues, mais assez difficiles à décrire.

Pour la preuve du théorème 10.32, voir par exemple Lieb et Loss [16, Theorem 2.14] et la section 14.5. Voir également l'éclairage sur la similitude entre la preuve de ce résultat et celle d'un autre théorème de représentation de Riesz, le théorème 14.19, apporté à la fin de la section 14.4.

Chapitre 11

Convolution

11.0 Aperçu

La *convolution* est historiquement apparue dans la résolution des équations différentielles, mais ses utilisations les plus fréquentes sont liées au *lissage* des fonctions, c'est-à-dire à l'approximation d'une fonction peu régulière (par exemple discontinue) par des fonctions plus lisses (par exemple de classe C^∞).

Donnons un exemple simple de telle approximation. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Posons

$$F^\varepsilon(x) := \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y)\, dy, \ \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, \varepsilon > 0. \tag{11.1}$$

Le théorème des accroissements finis donne l'existence d'un point $\xi = \xi(x, \varepsilon) \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ tel que $F^\varepsilon(x) = f(\xi)$. Quand ε est petit, ξ est proche de x, et donc, du moins intuitivement, F^ε est proche de f. Il est d'ailleurs aisé de formaliser cette intuition et de montrer les résultats suivants.

(A) Si f est continue, alors $F^\varepsilon \to f$ simplement.

(B) Si f est uniformément continue, alors $F^\varepsilon \to f$ uniformément.

Par ailleurs, F^ε est plus lisse que f : si, par exemple, f est continue, alors F^ε est de classe C^1. En particulier, (A) et (B) ci-dessus montrent que l'on peut approcher (pour la convergence simple ou uniforme) une fonction continue par des fonctions de classe C^1.

Dans ce chapitre, nous allons procéder un procédé général d'approximation. Il est basé sur le *produit de convolution*, qui associe à deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la « fonction »

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x - y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, g(y)\, dy\ ; \tag{11.2}$$

les guillemets attirent l'attention sur le fait que les intégrales de (11.2) n'existent pas nécessairement.

11.1 Remarque. Pour pouvoir considérer $f * g$, les fonctions f et g doivent être définies sur tout $\mathbb{R}^n$. ◇

La formule (11.1) peut se réécrire comme

$$F^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\varepsilon} f(y)\, \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x-y)\, dy = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} f(y) \chi_{[-1,1]} \left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy,$$

ou encore, si nous posons $g(y) \coloneqq \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(y)$, comme

$$F^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} f(y) g \left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy. \tag{11.3}$$

Les convergences (A) et (B) peuvent s'écrire de manière informelle

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} f(y) g \left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \to \left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\, dy\right) f(x). \tag{11.4}$$

la convergence étant, selon les cas, simple ou uniforme.

Le résultat fondamental de ce chapitre, le théorème 11.10, affirme que, si $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est « convenable »,[†] alors, pour $1 \le p < \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, nous avons

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \ni x \mapsto F^\varepsilon(x) \coloneqq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} f(y) \rho \left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \in C^\infty(\mathbb{R}), \\ &F^\varepsilon \to \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(y)\, dy\right) f \text{ dans } \mathscr{L}^p(\mathbb{R}) \text{ quand } \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Un résultat analogue est vrai dans $\mathbb{R}^n$.

Pour prouver ce résultat, et également en vue d'autres applications, nous allons donner des conditions sur f et g qui assurent que le produit de convolution est bien défini p. p. et a des propriétés d'intégrabilité (*inégalité de Young*, théorème 11.3).

Par la suite, nous allons décrire une bonne classe de fonctions ρ telles que $f * \rho$ soit *lisse* (proposition 11.8).

La partie la plus importante de ce chapitre est dédiée à la preuve de (11.5).

La section 11.3 contient des conséquences de ce résultat d'approximation, et des généralisations de celui-ci, sous des hypothèses plus faibles sur ρ (théorème 11.28).

[†] ρ doit être bien plus lisse que notre g, et d'ailleurs l'existence d'un tel ρ n'est pas évidente.

Nous finissons par le *théorème d'approximation de Weierstrass* 11.30 : « toute fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}^n$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales », théorème dont la preuve « historique » passe par la convolution.

Par ailleurs, le produit de convolution joue un rôle important en théorie des probabilités. Il s'agit dans ce contexte non pas de la convolution de deux fonctions, mais de deux probabilités. Plus précisément, si les vecteurs aléatoires $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sont indépendants, de lois $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$, alors $X+Y$ est de loi $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$. Le produit de convolution de deux mesures ou d'une mesure et d'une fonction seront traités en exercice (exercices # 45 et # 46 de la feuille # 7).

Compétences minimales attendues.

a) Savoir appliquer l'inégalité de Young.

b) Savoir raisonner « par densité », en utilisant la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathscr{L}^p(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$ (théorème 11.12). ◇

Dans ce chapitre, nous considérons uniquement des *fonctions* ou classes d'équivalence f, g, etc., *définies sur* $\mathbb{R}^n$ ou sur une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$ et qui sont *Lebesgue mesurables*. *La mesure* sous-jacente *est* λ_n, sur la tribu $\mathscr{L}_n$. Cette mesure étant complète, nous pouvons travailler si nécessaire avec des fonctions définies p. p. : pour de telles fonctions, les notions de mesurabilité et intégrabilité sont bien définies (remarque 8.36).

11.1 Inégalité de Young

11.2 Définition (Produit de convolution)**.** Le *produit de convolution* de $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy, \tag{11.6}$$

défini pour les $x \in \mathbb{R}^n$ tels que la fonction $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ a une intégrale.

D'après l'exercice 10.12, la définition du produit de convolution a aussi un sens pour des classes f et g. Dans la suite, nous travaillerons soit avec des classes, soit avec des fonctions boréliennes. (Rappelons que dans chaque classe nous pouvons choisir un représentant borélien ; voir l'exercice 10.14 a).) Si, de plus, f appartient à un espace de Lebesgue $\mathscr{L}^p$, alors nous pouvons supposer f finie partout (remarque 10.5 d)).

11.3 Théorème (Inégalité de Young)**.** Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $1/p + 1/q \geq 1$. Soit $1 \leq r \leq \infty$ défini par l'égalité $1/r = 1/p + 1/q - 1$.

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors :

a) Le produit de convolution $f * g$ est défini presque partout et définit une fonction Lebesgue mesurable.

b) Nous avons $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \tag{11.7}$$

c) Si $1/p + 1/q = 1$ (et donc $r = \infty$), nous avons les conclusions plus fortes suivantes : $f * g$ est défini en tout point, et $|f * g(x)| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Exercices

L'exercice suivant montre que le produit de convolution est *commutatif*.

11.4 Exercice. Nous avons $f * g(x) = g * f(x)$, au sens où l'une de ses quantités existe si et seulement si l'autre existe et dans ce cas elles sont égales. ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 11.3. Nous pouvons travailler avec des fonctions boréliennes finies en tout point (justifier).

c) Par symétrie du produit, nous pouvons supposer $p < \infty$ (justifier). Avec $h(y) := f(x - y)$, l'inégalité triangulaire 6.23 a) et l'inégalité de Hölder donnent

$$|f * g|(x) \leq \int |h(y)\, g(y)|\, dy \leq \|h\|_{L^p} \|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

(justifier la dernière égalité), ce qui au passage montre que $f * g$ est défini en tout point (justifier).

a) + b) Supposons maintenant $1/p + 1/q > 1$ et donc $1 \leq r < \infty$. Il suffit de traiter le cas des fonctions positives. En effet, si les conclusions du théorème sont vraies pour $|f|$ et $|g|$, alors $f * g(x)$ est défini pour tout x tel que $|f| * |g|(x)$ soit fini, et pour un tel x nous avons

$$f * g(x) = f_+ * g_+(x) - f_+ * g_-(x) - f_- * g_+(x) + f_- * g_-(x)$$

et $|f * g|(x) \leq |f| * |g|(x)$, d'où les parties a) et b) du théorème (justifier).

Si f, g sont boréliennes positives, alors $f * g(x)$ existe (mais peut être infini) pour tout x, car il s'agit de l'intégrale d'une fonction borélienne positive (vérifier que $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ est borélienne). Il suffit donc de montrer (11.7), car dans ce cas nous avons $f * g \in \mathscr{L}^r(\mathbb{R}^n)$ et donc $f * g(x) < \infty$ pour $\mathbb{R}^n \backslash A$, avec $A \subset \mathbb{R}^n$ borélien négligeable. De manière équivalente, (11.7) donne que $y \mapsto f(x - y)\, g(y)$ est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$ (ce qui donne la partie a) du théorème).

Notons les relations suivantes : $p \le r$, $q \le r$ et

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{rp/(r-p)} + \frac{1}{rq/(r-q)} = \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) = 1$$

(avec les conventions $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$). En utilisant ces faits et l'exercice 10.22 (avec $k := 3$, $p_1 := r$, $p_2 := (rp)/(r-p)$, $p_3 := (rq)/(r-q)$ et la convention $1/0 = \infty$), nous obtenons, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et avec $h(y) := f(x-y)$:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[h^{p/r}(y)\, g^{q/r}(y)\right] h^{1-p/r}(y)\, g^{1-q/r}(y)\, dy \\ &\le \|h^{p/r}\, g^{q/r}\|_{L^r}\, \|h^{1-p/r}\|_{L^{(rp)/(r-p)}}\, \|g^{1-q/r}\|_{L^{(rq)/(r-q)}} \\ &= \|h^{p/r}\, g^{q/r}\|_{L^r}\, \|h\|_{L^p}^{1-p/r}\, \|g\|_{L^q}^{1-q/r} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x-y)\, g^q(y)\, dy\right)^{1/r} \|f\|_{L^p}^{1-p/r}\, \|g\|_{L^q}^{1-q/r} \end{aligned}$$

(vérifier et justifier les deux dernières lignes, en considérant séparément les cas où $p = r$ ou $q = r$).

Ceci implique (via le théorème de Tonelli)

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^r}^r &= \int_{\mathbb{R}^n} [f * g(x)]^r\, dx \le \|f\|_{L^p}^{r-p}\, \|g\|_{L^q}^{r-q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x-y)\, g^q(y)\, dy\right) dx \\ &= \|f\|_{L^p}^{r-p}\, \|g\|_{L^q}^{r-q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x-y)\, dx\right) g^q(y)\, dy = \|f\|_{L^p}^r\, \|g\|_{L^q}^r \end{aligned}$$

(vérifier), d'où (11.7). CQFD

11.2 Régularisation

Dans cette partie, nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne usuelle, désignée par « $|\ |$ ». [†] Les intégrales s'entendent par rapport à la mesure de Lebesgue.

Rappelons le résultat suivant de calcul différentiel.

11.5 Lemme. Il existe une fonction $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, non identiquement nulle, telle que :

i) $0 \le \zeta \le 1$ si $|x| < 1$.

ii) $\zeta(x) = 0$ si $|x| \ge 1$.[‡] ◇

[†] Donc $|x| = \|x\|_2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

[‡] Voici un exemple *explicite* de telle fonction (dont nous ne vérifierons pas ici les propriétés).

$$\zeta(x) := \begin{cases} e^{-1/(1-|x|^2)}, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| \ge 1 \end{cases}.$$

La fonction ζ est alors intégrable d'intégrale strictement positive (justifier). En divisant ζ par son intégrale, nous obtenons ainsi l'existence d'un *noyau régularisant*. Les noyaux régularisants jouent un rôle fondamental dans l'approximation d'une fonction par des fonctions lisses.

11.6 Définition (Noyau régularisant)**.** Un *noyau régularisant* est une fonction $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que il existe $0 < R < \infty$ tel que

i) $\rho(x) \geq 0$ si $|x| < R$.

ii) $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq R$.

iii) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1$.

Si, de plus, $R = 1$, alors ρ est un *noyau régularisant standard*.

Une autre classe de fonctions d'intérêt dans les procédures de régularisation est $C_c^k(\Omega)$.

11.7 Définition. Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$,

$$C_c^k(\Omega) := \{\varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R})\,;\, \text{il existe un compact } K \subset \Omega \text{ tel que } \varphi(x) = 0,\ \forall\, x \in \Omega\backslash K\}.$$

Le résultat suivant montre que la convolution avec des fonctions de $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ « lisse » les fonctions et donne une formule très importante, (11.8).

11.8 Proposition. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Soient $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$. Nous avons :

a) $f * \varphi$ est défini en tout point.

b) $f * \varphi \in C^k$.

c) Pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$,

$$\partial^\alpha(f * \varphi) = f * (\partial^\alpha \varphi). \tag{11.8}$$

La notation suivante est dans l'esprit de (11.3).

11.9 Notation. Si $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nous posons

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\, \rho(x/\varepsilon),\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \qquad \diamond \tag{11.9}$$

Le résultat suivant est le résultat central de ce chapitre.

11.10 Théorème. Soit ρ un noyau régularisant. Soit $1 \leq p < \infty$. Nous avons

$$f * \rho_\varepsilon \to f \text{ dans } \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n) \text{ quand } \varepsilon \to 0,\ \forall\, f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n). \tag{11.10}$$

En particulier, $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Résultat énoncé également sous la forme « $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ ».

11.11 Remarque. Noter l'ambiguïté de la formulation de la dernière partie du théorème. Au sens strict du terme, $C^\infty \cap L^p$ n'a pas de sens, car L^p contient des classes et C^∞ des fonctions. Le sens de l'énoncé est le suivant : pour tout $f \in L^p$, il existe une suite $(f_j)_j$ telle que :

a) $f_j \in C^\infty \cap \mathscr{L}^p$, $\forall\, j$.

b) Pour tout représentant $g \in \mathscr{L}^p$ de f, $f_j \to g$ dans $\mathscr{L}^p$.

Une formulation équivalente est que, avec f_j comme ci-dessus, la classe $[f_j] \in L^p$ de f_j vérifie $[f_j] \to f$ dans L^p. ◇

Une conséquence facile du théorème 11.10 est le résultat suivant.

11.12 Théorème. Soient $1 \le p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Alors $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathscr{L}^p(\Omega)$.

Résultat énoncé également sous la forme « $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ ».

11.13 Remarque. Le théorème 11.12 est à la base de la stratégie la plus utilisée pour montrer des propriétés de *toutes les fonctions* de l'espace $\mathscr{L}^p(\Omega)$, avec $1 \le p < \infty$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$:

1. Établir la propriété pour les fonctions $f \in C_c^\infty(\Omega)$.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathscr{L}^p(\Omega)$ qui ont la propriété étudiée est un *fermé*.

Nous illustrerons cette démarche dans la section 11.3 (preuve des propositions 11.22, 11.25 et du théorème 11.28).

Exercices

Voici quelques propriétés fondamentales de ρ_ε, avec ρ noyau régularisant standard.

11.14 Exercice. Soit ρ un noyau régularisant standard. Montrer, pour tout $\varepsilon > 0$:

a) $\rho_\varepsilon(x) \ge 0$ si $|x| < \varepsilon$.

b) $\rho_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| \ge \varepsilon$.

c) $\displaystyle\int \rho_\varepsilon = 1$. ◇

Cet exercice est un complément de la proposition 11.8. Cette fois-ci, c'est f qui est supposée de classe C^k.

11.15 Exercice. Soient $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Nous avons :

a) $f * \varphi$ est défini en tout point.
b) $f * \varphi \in C^k$.
c) Pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$,

$$\partial^\alpha (f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi. \tag{11.11}$$

d) Si f est un polynôme[†] (de n variables) de degré $\leq m$, alors $f * \varphi$ est un polynôme de degré $\leq m$. ◇

L'exercice suivant, dans l'esprit de l'exercice 4.32, sera utilisé dans la preuve du théorème 11.10.

11.16 Exercice. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, soit

$$K_j := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \operatorname{dist}(x, K) \leq 1/j\}.$$

Alors K_j est un compact, $\forall\, j$, et $K_j \searrow K$. ◇

L'exercice qui suit sera utilisé dans la preuve du théorème 11.12.

11.17 Exercice. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (muni d'une norme). Pour $j \in \mathbb{N}^*$, soit

$$K_j := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\| \leq j,\ \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \geq 1/j\}.$$

Alors K_j est un compact, $\forall\, j$, et $K_j \nearrow \Omega$. ◇

L'exercice suivant montre que la procédure d'approximation de la preuve du théorème 11.12 permet d'approximer une fonction dans plusieurs espaces $\mathscr{L}^p$ à la fois.

11.18 Exercice. Soient $1 \leq p_1, \ldots, p_k < \infty$. Soit $f \in \mathscr{L}^{p_1}(\Omega) \cap \ldots \cap \mathscr{L}^{p_k}(\Omega)$. Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_j \to f$ dans $\mathscr{L}^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, k$. ◇

11.19 Exercice. En prenant $n = 1$ et $f := \chi_{[0,\infty[}$, montrer que les théorèmes 11.10 et 11.12 et le lemme 11.20 sont faux si $p = \infty$. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 11.8. Rappelons le résultat suivant : une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ qui s'annule en dehors d'un compact est bornée.

Étape 1. Existence de $f * \partial^\alpha \varphi$ si ∂^α est d'ordre $\leq k$. Soit $R < \infty$ tel que $\varphi(x) = 0$, $\forall\, |x| \geq R$. Soit ∂^α une dérivée partielle d'ordre $\leq k$. Alors $\partial^\alpha \varphi$ est continue et s'annule en dehors de $\overline{B}(0, R)$ (justifier), donc il existe une constante finie C_α telle que $|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_\alpha$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

[†]Ou plutôt une fonction polynômiale.

Soit q le conjugué de p. De ce qui précède, $\partial^\alpha \varphi \in \mathscr{L}^q$ (justifier), et donc $f * \partial^\alpha \varphi$ est défini en tout point (théorème 11.3 c)).

Étape 2. $f * \varphi$ est continue. Soit $h(y,x) := f(y)\,\varphi(x-y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, de sorte que $f * \varphi(x) = \int h(y,x)\,dy$. Nous appliquons le théorème 7.10. La continuité par rapport au paramètre x étant claire, il faut obtenir la majoration exigée par le (i″) du théorème. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $\varphi(z-y) = 0$ si $|x-z| \leq 1$ et $|y| \geq r := R + |x| + 1$, car dans ce cas nous avons $|z-y| \geq R$ (justifier). Il s'ensuit que

$$f * \varphi(z) = \int_{B(0,r)} h(y,z)\,dy, \ \forall\, z \in \overline{B}(x,1).$$

De ce qui précède, nous avons la majoration

$$|h(y,z)| \leq g(y) := C_0\,|f(y)|\,\chi_{B(0,r)}(y), \ \forall\, z \in \overline{B}(x,1).$$

Pour conclure, il suffit de noter que g est intégrable, car, par l'inégalité de Hölder, si q est le conjugué de p alors

$$\|g\|_{L^1} \leq C_0\,\|f\|_{L^p}\,\|\chi_{B(0,r)}\|_{L^q} = C\,\|f\|_{L^p} \text{ (avec } C = C(r) < \infty).$$

La continuité de $f * \partial^\alpha \varphi$ (avec ∂^α dérivée partielle d'ordre $\leq k$) se montre de la même manière.

Étape 3. Preuve de $\partial_j(f * \varphi) = f * (\partial_j \varphi)$. Le raisonnement est analogue à celui de l'étape 2 ; on utilise le théorème 7.14 au lieu du théorème 7.10 (vérifier). Par récurrence sur l'ordre de différentiation, ceci permet d'établir c) pour tous les α concernés.

Pour conclure, $f * \varphi$ a, jusqu'à l'ordre k, des dérivées partielles continues qui vérifient c). Elle est donc de classe C^k et a les propriétés a)–c). La preuve est complète. CQFD

L'ingrédient clé de la preuve du théorème 11.10 est le lemme suivant.

11.20 Lemme. Soit $1 \leq p < \infty$. Soient $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $\delta > 0$.

Alors il existe une fonction étagée de la forme $g = \sum_j a_j\,\chi_{K_j}$, avec K_j compact, $\forall\, j$, telle que $\|f - g\|_{L^p} < \delta$.

De manière équivalente, l'espace vectoriel engendré par les fonctions χ_K, avec $K \subset \mathbb{R}^n$ compact, est dense dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$.[†] ◇

Démonstration du lemme 11.20. Nous pouvons supposer f borélienne (justifier). Soit $(f_k)_k$ une suite de fonctions boréliennes étagées telle que $\operatorname{sgn} f_k = \operatorname{sgn} f$, $\forall\, k$, $f_k \to f$ et

[†] Par abus de langage, comme expliqué dans la remarque 11.11, la conclusion du lemme 11.20 est que les fonctions étagées de la forme $g = \sum_j a_j\,\chi_{K_j}$ sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Par ailleurs, la conclusion reste valable si nous remplaçons $\mathbb{R}^n$ par un ouvert de $\mathbb{R}^n$; ceci découle de la preuve du lemme 11.20.

$|f_k| \nearrow |f|$ (l'existence d'une telle suite découle de la preuve du théorème 3.5). Par convergence dominée, nous avons $\|f_k - f\|_{L^p} \to 0$; par ailleurs, $f_k \in \mathscr{L}^p$, $\forall\, k$ (justifier).

Chaque f_k étant une somme finie de la forme $\sum_j a_j \chi_{A_j}$, avec A_j borélien et $\nu_n(A_j) < \infty$ (la dernière propriété découlant de $f_k \in \mathscr{L}^p$; justifier), il suffit de montrer la conclusion du lemme si $f = \chi_A$, avec A borélien de mesure de Lebesgue finie (détailler). Dans ce cas, rappelons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tel que l'on ait $K \subset A$ et $\nu_n(A\backslash K) < \varepsilon$ (corollaire 4.27).

Nous obtenons $\|\chi_A - \chi_K\|_{L^p} = \|\chi_{A\backslash K}\|_{L^p} = (\nu_n(A\backslash K))^{1/p} < \varepsilon^{1/p}$. ε étant arbitraire, nous obtenons le résultat désiré de densité. CQFD

Démonstration du théorème 11.10. Nous considérons uniquement un noyau régularisant *standard* ; le cas d'un noyau régularisant général est analogue.

Pour la deuxième partie du théorème, il suffit de noter que $f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (proposition 11.8) et d'appliquer (11.10).

Soit

$$X := \{f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)\,;\, f * \rho_\varepsilon \to f \text{ dans } \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n) \text{ quand } \varepsilon \to 0\}. \tag{11.12}$$

Par linéarité du produit de convolution par rapport au premier argument, X est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^p$.

Étape 1. X est fermé dans $\mathscr{L}^p$. Soit $(f_j)_j \subset X$ avec $f_j \to f$ dans $\mathscr{L}^p$. Soit $\delta > 0$. Alors il existe un j et un ε_0 tels que $\|f_j - f\|_{L^p} < \delta/3$ et $\|f_j * \rho_\varepsilon - f_j\|_{L^p} < \delta/3$, $\forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. L'inégalité de Young et le fait que $\|\rho_\varepsilon\|_{L^1} = 1$, $\forall\, \varepsilon$ (exercice 11.14) donnent

$$\begin{aligned}\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p} &\le \|(f - f_j) * \rho_\varepsilon\|_{L^p} + \|f_j * \rho_\varepsilon - f_j\|_{L^p} + \|f_j - f\|_{L^p} \\ &\le \|f - f_j\|_{L^p} + \|f_j * \rho_\varepsilon - f_j\|_{L^p} + \|f_j - f\|_{L^p} < \delta,\ \forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.\end{aligned}$$

δ étant arbitraire, nous obtenons que $f \in X$.

Au vu du lemme 11.20 et de ce qui précède, afin de conclure il suffit de montrer l'étape 2 qui suit.

Étape 2. Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, nous avons $\chi_K \in X$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$. Posons, pour $j \ge 1$,

$$K_j := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \operatorname{dist}(x, K) \le 1/j\} = \cup_{x\in K} \overline{B}(x, 1/j) \tag{11.13}$$

(justifier la deuxième égalité en utilisant le fait que, si $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et $y \in \mathbb{R}^n$, alors il existe $x \in F$ tel que $\operatorname{dist}(y, F) = |y - x|$).

L'ensemble K_j est compact, $\forall\, j$, et nous avons $K_j \searrow K$ (exercice 11.16). Comme $\nu_n(K_1) < \infty$, le théorème de la suite décroissante implique l'existence d'un j tel que $\nu_n(K_j\backslash K) < \delta$ (justifier).

Posons $\varepsilon_0 := 1/j$. Soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Notons les faits suivants (évidents sur un dessin ; les justifier en utilisant la deuxième égalité dans (11.13)) :

$$\text{si } x \in K \text{ et } y \in B(0,\varepsilon),\ \text{alors } x - y \in K_j,\ \text{et donc } \chi_{K_j}(x - y) = 1\,; \tag{11.14}$$

$$\text{si } x \notin K_j \text{ et } y \in B(0,\varepsilon),\ \text{alors } x - y \notin K,\ \text{et donc } \chi_K(x - y) = 0. \tag{11.15}$$

Il s'ensuit de (11.14) que

$$x \in K \implies \chi_{K_j} * \rho_\varepsilon(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \chi_{K_j}(x-y)\,\rho_\varepsilon(y)\,dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)\,dy,$$
$$= 1 = \chi_K(x),$$

d'où

$$x \in K \implies \chi_K(x) - \chi_K * \rho_\varepsilon(x) = (\chi_{K_j} - \chi_K) * \rho_\varepsilon(x) = \chi_{K_j \backslash K} * \rho_\varepsilon(x). \tag{11.16}$$

De même, (11.15) donne (vérifier)

$$x \notin K_j \implies \chi_K(x) - \chi_K * \rho_\varepsilon(x) = 0. \tag{11.17}$$

Par ailleurs, pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons (vérifier) $0 \le \chi_K * \rho_\varepsilon(x) \le 1$, d'où

$$x \in K_j \backslash K \implies |\chi_K(x) - \chi_K * \rho_\varepsilon(x)| = \chi_K * \rho_\varepsilon(x) \le 1. \tag{11.18}$$

En combinant (11.16)–(11.18), nous obtenons

$$|\chi_K - \chi_K * \rho_\varepsilon| \le \chi_{K_j \backslash K} * \rho_\varepsilon + \chi_{K_j \backslash K},\ \forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{11.19}$$

L'inégalité (11.19) et celles de Minkowski et Young donnent (détailler) :

$$\begin{aligned} \|\chi_K - \chi_K * \rho_\varepsilon\|_{L^p} &\le \|\chi_{K_j \backslash K} * \rho_\varepsilon\|_{L^p} + \|\chi_{K_j \backslash K}\|_{L^p} \\ &\le \|\chi_{K_j \backslash K}\|_{L^p}\, \|\rho_\varepsilon\|_{L^1} + \|\chi_{K_j \backslash K}\|_{L^p} = 2\,\|\chi_{K_j \backslash K}\|_{L^p} \\ &= 2\,(\nu_n(K_j \backslash K))^{1/p} < 2\,\delta^{1/p},\ \forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \end{aligned} \tag{11.20}$$

$\delta > 0$ étant arbitraire, nous obtenons (11.10) pour $f = \chi_K$. CQFD

En examinant la preuve de (11.19), nous déduisons le résultat suivant.

11.21 Lemme (Existence de fonctions plateau ; lemme d'Urysohn)**.** Soient

$$K \subset U \subset \mathbb{R}^n, \text{ avec } K \text{ compact et } U \text{ ouvert.}$$

Il existe une fonction $\varphi \in C_c^\infty(U)$ telle que :

i) $0 \le \varphi \le 1$ sur U.

ii) $\varphi = 1$ sur K. ◇

Démonstration du lemme 11.21. Soit $\varepsilon_0 := \operatorname{dist}(K, U^c)$, de sorte que $\varepsilon_0 > 0$ (pourquoi ?).

Soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$. Posons

$$L := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \operatorname{dist}(x,K) \le \varepsilon\},\ M := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \operatorname{dist}(x,K) \le 2\varepsilon\}.$$

Alors $K \subset L \subset M \subset U$ et M est un compact (vérifier). Soit ρ un noyau régularisant standard. La preuve de (11.19) implique que $\varphi := \chi_L * \rho_\varepsilon$ a toutes les propriétés requises ; en particulier, $\varphi(x) = 0$ si $x \notin M$, et donc $\varphi \in C_c^\infty(U)$. CQFD

Démonstration du théorème 11.12. Soit $f \in \mathscr{L}^p(\Omega)$. Soit $\overline{f}$ le prolongement de f avec la valeur 0 à $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$, de sorte que $\overline{f} \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\overline{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\overline{f} - \overline{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/2$; l'existence de $\overline{g}$ suit du théorème 11.10.

Soit g la restriction de $\overline{g}$ à Ω. Nous avons $g \in C^\infty(\Omega) \cap \mathscr{L}^p(\Omega)$ et (justifier)

$$\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\overline{f} - \overline{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/2.$$

Il reste à trouver $h \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\|g - h\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/2$.

Rappelons le résultat suivant de topologie : il existe une suite $(K_j)_{j\geq 1}$ de compacts telle que $K_j \nearrow \Omega$ (voir l'exercice 11.17).

Soit, comme dans le lemme 11.21, $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \varphi_j \leq 1$ et $\varphi_j = 1$ sur K_j. Nous avons $\varphi_j \to 1$ simplement dans Ω (justifier). Comme $|g\,\varphi_j - g| \leq |g|$ et $g\,\varphi_j \to g$ simplement, nous obtenons par convergence dominée que $\|g\,\varphi_j - g\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Pour j suffisamment grand, $h := g\,\varphi_j$ convient. CQFD

11.3 Pour aller plus loin

Si $1 \leq p < \infty$, nous savons (théorème 11.12) que $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathscr{L}^p(\Omega)$. Ce résultat permet, dans certains cas, d'établir des propriétés de *toutes* les fonctions $f \in \mathscr{L}^p(\Omega)$ en étudiant *uniquement* les fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$. Nous donnons ici quelques exemples typiques.

11.22 Proposition. Soient p, q exposants conjugués. Si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$. ◇

Démonstration de la proposition 11.22. Nous avons soit $p < \infty$, soit $q < \infty$. Supposons par exemple $p < \infty$.

Étape 1. Preuve si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dans ce cas, la conclusion découle de la proposition 11.8.

Étape 2. Preuve si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Soit $(f_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $f_j \to f$ dans $\mathscr{L}^p$ (l'existence de la suite découle du théorème 11.12). L'inégalité de Hölder donne

$$|f_j * g(x) - f * g(x)| = |(f_j - f) * g(x)| \leq \|f_j - f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q} \to 0 \text{ quand } j \to \infty.$$

Il s'ensuit que $f * g$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, donc continue. CQFD

11.23 Notation. Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $\tau_h f(x) := f(x - h)$, $\forall\, x, h \in \mathbb{R}^n$. ◇

L'exercice suivant sera utilisé dans la preuve de la proposition 11.25.

11.24 Exercice. Si $f \sim g$, alors $\tau_h f \sim \tau_h g$, $\forall\, h$. ◇

11.25 Proposition (Continuité des translations dans L^p)**.** Soit $1 \leq p < \infty$. Pour tout $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$, nous avons $\tau_h f \to f$ dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ quand $h \to 0$.

De même dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. ◇

Démonstration de la proposition 11.25. Compte tenu de l'exercice 11.24, il suffit d'établir le résultat dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Étape 1. Preuve si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit $R < \infty$ tel que $f(x) = 0$ si $|x| \geq R$. Soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $|h| \leq 1$. Si $|x| \geq R+1$, alors $\tau_h f(x) = 0$ et $f(x) = 0$ (vérifier).

Par ailleurs, soit $M := \max\{|\nabla f(x)| \,;\, x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$ (justifier la finitude de M). L'inégalité des accroissements finis donne (vérifier)

$$|\tau_h f(x) - f(x)| \leq M\,|h|,\ \forall\, x,\ h \in \mathbb{R}^n.$$

Il s'ensuit que, pour $|h| \leq 1$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_{L^p}^p &= \int_{B(0,R+1)} |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, dx \\ &\leq M^p\,|h|^p \int_{B(0,R+1)} dx \to 0 \text{ quand } h \to 0.\end{aligned}$$

Étape 2. Preuve si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon/3$ (l'existence de g suit du théorème 11.12). Soit $\delta > 0$ tel que $\|\tau_h g - g\|_{L^p} < \varepsilon/3$ si $|h| < \delta$ (l'existence de δ découle de la première étape).

En notant que $\|\tau_h k\|_{L^p} = \|k\|_{L^p}$, $\forall\, k \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ (vérifier), nous obtenons, pour $|h| < \delta$:

$$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_{L^p} &\leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_{L^p} + \|\tau_h g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &= \|\tau_h (f-g)\|_{L^p} + \|\tau_h g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &= \|f - g\|_{L^p} + \|\tau_h g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} < \varepsilon.\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, nous obtenons la conclusion de la proposition. CQFD

Nous allons maintenant considérablement généraliser le résultat de convergence (11.10), en affaiblissant les conditions sur (l'analogue de) ρ_ε.

11.26 Définition (Approximation de l'identité)**.** Une *approximation de l'identité* est une famille $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que :

i) $\zeta^\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est (Lebesgue) intégrable, $\forall\, \varepsilon > 0$.

ii) $\displaystyle\int \zeta^\varepsilon = 1$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

iii) Il existe une constante $M < \infty$ telle que $\displaystyle\int |\zeta^\varepsilon| \leq M$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

iv) Pour tout $\delta > 0$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |\zeta^\varepsilon| = 0$.

Définition analogue lorsqu'il s'agit d'une suite $(\zeta^j)_{j\geq 1}$. ◇

Un exemple fondamental d'approximation de l'identité est donné par le résultat suivant.

11.27 Proposition. Soit $\rho \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int \rho = 1$. Soit, comme dans (11.9),

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(x/\varepsilon),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Alors $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une approximation de l'identité.

En particulier, cette proposition s'applique lorsque ρ est un noyau régularisant. ◇

Démonstration.

i) + ii) + iii) Nous avons $\int \rho_\varepsilon = \int \rho = 1$ et $\int |\rho_\varepsilon| = \int |\rho| := M < \infty$ (vérifier), de sorte que i)–iii) sont satisfaites.

iv) Soit $\delta > 0$. Nous avons (justifier, en utilisant le changement linéaire de variables $\Phi(y) := \varepsilon\, y$)

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\delta)} |\rho_\varepsilon(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\delta/\varepsilon)} |\rho(y)|\, dy \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0,$$

la dernière conclusion étant une conséquence du théorème de convergence dominée (justifier). CQFD

Le résultat suivant généralise le théorème 11.10.

11.28 Théorème. Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'identité.

Pour tout $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ nous avons $f * \zeta^\varepsilon \to f$ dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ quand $\varepsilon \to 0$.

De même pour une suite $(\zeta^j)_{j\geq 1}$.

De même dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. ◇

Démonstration. Étape 1. Preuve quand $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour les besoins des résultats à venir, nous allons estimer la différence $f * \zeta^\varepsilon - f$ lorsque f a la propriété plus faible $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Rappelons qu'une telle fonction f est *uniformément* continue sur $\mathbb{R}^n$.

Donné $\xi > 0$, soit $0 < \delta < 1$ tel que

$$[\forall\, x,\, x' \in \mathbb{R}^n,\ |x - x'| < \delta] \implies |f(x) - f(x')| < \xi.$$

Soit $C < \infty$ tel que $|f(x)| \leq C$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ (justifier l'existence de C). Enfin, soit $R < \infty$ tel que $f(x) = 0$ si $|x| \geq R$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\begin{aligned}
|f * \zeta^\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int f(x-y)\, \zeta^\varepsilon(y)\, dy - f(x) \right| \\
&= \left| \int (f(x-y) - f(x))\, \zeta^\varepsilon(y)\, dy \right| \\
&\leq \int |f(x-y) - f(x)|\, |\zeta^\varepsilon(y)|\, dy \\
&= \int_{B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)|\, |\zeta^\varepsilon(y)|\, dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)|\, |\zeta^\varepsilon(y)|\, dy \\
&\leq \xi \int_{B(0,\delta)} |\zeta^\varepsilon(y)|\, dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)|\, |\zeta^\varepsilon(y)|\, dy \\
&\leq \xi \int_{\mathbb{R}^n} |\zeta^\varepsilon(y)|\, dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)|\, |\zeta^\varepsilon(y)|\, dy \\
&\leq M\, \xi + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)|\, |\zeta^\varepsilon(y)|\, dy \\
&\leq M\, \xi + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} (|f(x-y)| + |f(x)|)\, |\zeta^\varepsilon(y)|\, dy \\
&\leq M\, \xi + 2C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |\zeta^\varepsilon(y)|\, dy.
\end{aligned} \tag{11.21}$$

Par ailleurs, si $|x| \geq R+1$ et $|y| < \delta < 1$, alors $f(x) = f(x-y) = 0$. Il s'ensuit que pour un tel x le calcul (11.21) donne

$$\begin{aligned}
|f * \zeta^\varepsilon(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y)|\, |\zeta^\varepsilon(y)|\, dy \\
&= |f| * (|\zeta^\varepsilon|\, \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)})(x).
\end{aligned} \tag{11.22}$$

Soit $r = r_{\delta,\varepsilon} := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |\zeta^\varepsilon(y)|\, dy$, de sorte que $\lim_{\varepsilon \to 0} r_{\delta,\varepsilon} = 0, \forall\, \delta > 0$. Soit $\psi = \psi_{\delta,\varepsilon} := |\zeta^\varepsilon|\, \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)}$, qui vérifie $\|\psi\|_{L^1} = r$.

En utilisant (11.21) si $|x| < R+1$ et (11.22) si $|x| \geq R+1$, nous obtenons, grâce à l'inégalité de Young et avec $N = N(R) < \infty$:

$$\begin{aligned}
\|f * \zeta^\varepsilon - f\|_{L^p}^p &\leq \int_{B(0,R+1)} [M\, \xi + 2C\, r]^p\, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R+1)} [|f| * \psi]^p \\
&\leq N\, [M\, \xi + 2C\, r]^p + \int_{\mathbb{R}^n} [|f| * \psi]^p \\
&\leq N\, [M\, \xi + 2C\, r]^p + \|f\|_{L^p}^p \|\psi\|_{L^1}^p \to N\, M^p\, \xi^p \text{ quand } \varepsilon \to 0.
\end{aligned} \tag{11.23}$$

$\xi > 0$ étant arbitraire, nous obtenons que $f * \zeta^\varepsilon \to f$ dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Étape 2. Preuve si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Soient $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $\xi > 0$. Soient $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que $\|f - g\|_{L^p} < \xi$ et $\|g * \zeta^\varepsilon - g\|_{L^p} < \xi$, $\forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Pour un tel ε, nous avons (détailler)

$$\begin{aligned}\|f * \zeta^\varepsilon - f\|_{L^p} &\le \|f * \zeta^\varepsilon - g * \zeta^\varepsilon\|_{L^p} + \|g * \zeta^\varepsilon - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p}\\ &\le \|(f-g) * \zeta^\varepsilon\|_{L^p} + 2\,\xi \le \|f - g\|_{L^p}\,\|\zeta^\varepsilon\|_{L^1} + 2\,\xi \le (M+2)\,\xi.\end{aligned}$$

$\xi > 0$ étant arbitraire, nous obtenons la conclusion du théorème pour f. CQFD

Au passage, nous avons montré le résultat suivant (voir (11.21)).

11.29 Corollaire. Soit $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'identité. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Nous avons $f * \zeta^\varepsilon$ uniformément dans $\mathbb{R}^n$ quand $\varepsilon \to 0$. ◇

Ce corollaire intervient dans la preuve du résultat suivant.

11.30 Théorème (Théorème d'approximation de Weierstrass)**.** Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Soit $f \in C(K, \mathbb{R})$.

Alors il existe une suite de polynômes[†] de n variables $(P_j)_j$ telle que $P_j \to f$ uniformément sur K.

De manière équivalente, $\{P : K \to \mathbb{R}\,;\, P \text{ fonction polynômiale}\}$ est dense dans $C(K, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. ◇

La preuve qui suit est due (du moins dans $\mathbb{R}$) à Weierstrass. Son adaptation à $\mathbb{R}^n$, présentée ici, est aisée. L'idée principale apparaît déjà dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Nous utilisons le résultat suivant de topologie (théorème de Tietze) : si B est une boule de $\mathbb{R}^n$ telle que $K \subset B$, alors toute fonction $f \in C(K, \mathbb{R})$ admet une extension $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $g(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash B$. Ainsi, quitte à remplacer K par $\overline{B}$ et f par g, il suffit de montrer le résultat pour la restriction à $\overline{B}$ d'une fonction $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ qui s'annule en dehors de B (justifier). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $B = B(0, R)$.

Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(x) = 0$ si $|x| \ge R$. Soit ρ la « gaussienne standard » dans $\mathbb{R}^n$,

$$\rho(x) := \frac{1}{\pi^{n/2}}\, e^{-|x|^2},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Rappelons que $\displaystyle\int \rho = 1$. La proposition 11.27 combinée avec le corollaire 11.29 donne $f * \rho_\varepsilon \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^n$ quand $\varepsilon \to 0$, où

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\pi^{n/2}\,\varepsilon^n}\, e^{-|x|^2/\varepsilon^2},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{11.24}$$

[†]Ou plutôt de fonctions polynômiales.

Soit $\delta > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$|f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| < \delta, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{11.25}$$

Nous allons trouver un polynôme S tel que

$$|(\rho_\varepsilon - S)(z)| \leq \delta, \ \forall\, z \in \overline{B}(0, 2R). \tag{11.26}$$

En admettant l'existence d'un tel S, nous concluons de la façon suivante. Pour tout φ nous avons

$$f * \varphi(x) = \int_{\overline{B}(0,R)} f(y)\, \varphi(x-y)\, dy. \tag{11.27}$$

Soit $M < \infty$ tel que $|f(x)| \leq M, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Si $x, y \in \overline{B}(0,R)$, alors $x - y \in \overline{B}(0, 2R)$. En combinant ce fait avec (11.25)–(11.27), il s'ensuit que, pour tout $x \in \overline{B}(0,R)$ nous avons, avec $N = N(R) < \infty$,

$$\begin{aligned} |f * S(x) - f(x)| &\leq |f * [S(x) - \rho_\varepsilon](x)| + |(f * \rho_\varepsilon - f)(x)| \\ &< \left| \int_{\overline{B}(0,R)} f(y)\, [S - \rho_\varepsilon](x-y)\, dy \right| + \delta \\ &\leq M\, \delta \int_{\overline{B}(0,R)} dy + \delta = N\, \delta. \end{aligned}$$

$\delta > 0$ étant arbitraire nous obtenons, pour une suite $(S_j)_j$ convenable de polynômes, $f * S_j \to f$ uniformément sur B quand $j \to \infty$. Pour conclure, il suffit de noter que $f * S_j$ est un polynôme (exercice 11.15 d)).

Ainsi, pour compléter la preuve il suffit de trouver S satisfaisant (11.26). Rappelons que le développement en série de l'exponentielle converge vers l'exponentielle uniformément sur les compacts : si $T > 0$ et $\xi > 0$, alors il existe k tel que

$$\left| e^t - \sum_{\ell=0}^{k} \frac{t^\ell}{\ell!} \right| \leq \xi, \ \forall\, t \in [-T, T]. \tag{11.28}$$

Soit k tel que (11.28) soit valide avec $T := 4\, R^2/\varepsilon^2$ et $\xi := \pi^{n/2}\, \varepsilon^n\, \delta$. Posons

$$S := \frac{1}{\pi^{n/2}\, \varepsilon^n} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{\left(-|x|^2/\varepsilon^2\right)^\ell}{\ell!}. \tag{11.29}$$

De (11.28), (11.29) et (11.24), nous avons (11.26) (vérifier !). CQFD

11.31 Remarque. Mise en perspective du théorème 11.30. Sur $[0,1]^n$, une autre preuve de ce résultat, d'inspiration probabiliste, est due à Bernstein. Vous allez rencontrer le théorème de Bernstein en préparation à l'agrégation. Un autre indice de la nature probabiliste de ce résultat serait l'utilisation, dans la preuve initiale de Weierstrass, de la gaussienne,

liée au mouvement brownien. Que nenni. La preuve de Weierstrass repose sur l'existence d'une fonction $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, intégrable, d'intégrale non nulle et *entière*, c'est-à-dire développable en série entière sur tout compact. La gaussienne en est un exemple, mais d'autres fonctions, comme par exemple

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \frac{x_1}{1+|x|^{2n+2}} + \left(1 + \sin\left(|x|^4\right) - \cos\left(e^{|x|^6}\right)\right) e^{-|x|^8},$$

(et plein d'autres !), dont l'interprétation probabiliste est au minimum peu évidente, font l'affaire.

Comme preuve supplémentaire de la nature non-probabiliste de ce résultat, sa généralisation, également vue plutôt en préparation à l'agrégation, le théorème de Stone, qui concerne des fonctions continues sur un compact (pas nécessairement de $\mathbb{R}^n$), a une preuve presque algébrique, sans aucun ingrédient probabiliste.

Enfin, le schéma habituel de preuve est « théorème de Bernstein (avec preuve probabiliste) $\Rightarrow$ théorème de Weiestrass ». Pour une approche « théorème de Weiestrass $\Rightarrow$ théorème de Bernstein », voir mon texte moldu ''A muggle's approach to Bernstein's approximation theorem''. $\diamond$

Chapitre 12

Séries de Fourier

12.0 Aperçu

Dans ce chapitre, nous considérons des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$, avec $I \subset \mathbb{R}$ *intervalle. Nous travaillerons dans* $]0, 2\pi[$*, mais le choix de* I *n'est pas important.*[†] Notre but est d'écrire f comme une « superposition d'ondes (co)sinusoïdales », ou somme d'une *série de Fourier*, c'est-à-dire de donner un sens et de justifier l'égalité

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx), x \in I. \tag{12.1}$$

Comme son nom ne l'indique pas, l'intuition de cette égalité est due à Daniel Bernoulli, 69 ans avant le traité de (Jean Baptiste) Joseph Fourier, et sa première preuve à (Johann Peter) Gustav Lejeune Dirichlet, 7 ans après le traité. Mathématiquement parlant, la contribution de Fourier a été de donner la formule des coefficients a_n et b_n et d'affirmer, moult exemples numériques à l'appui, la validité de (12.1). Néanmoins, la justification de l'intuition de Fourier a été un moteur extraordinaire pour la recherche mathématique et a attiré l'attentions de mathématiciens de tout premier plan ; d'ailleurs, la section 12.5 « Pour aller plus loin » a des allures de Gotha[‡] des analystes du vingtième siècle.

Nous travaillons dans $I =]0, 2\pi[$*, muni de la tribu de Lebesgue et de la mesure* $\mu = (1/m(I))\,\lambda_1 = (1/(2\pi))\,\lambda_1$. Ainsi, si $1 \leq p < \infty$, alors

$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.^{\S} \tag{12.2}$$

[†] Attention toutefois aux formules, qui dépendent de I.

[‡] Ça peut ne pas parler au moins de 50 ans. Au sens figuré, Gotha = liste des GOATs.

[§] Rappelons la convention $\int_a^b g(x)\,dx = \int_{]a,b[} g\,d\lambda_1$.

Toutes les (classes de) fonctions f considérées sont supposées être Lebesgue intégrables sur I. I étant de mesure finie, il s'ensuit que l'hypothèse d'intégrabilité est satisfaite si $f \in L^p(I)$ pour un $p \geq 1$ (remarque 10.16). Selon un principe rencontré à plusieurs reprises, les énoncés comprennent des classes de fonctions, les preuves se font sur des fonctions.

Comme annoncé plus haut, notre but est d'étudier la validité de (12.1). Néanmoins, pour des raisons d'esthétique des formules et aussi pour anticiper la transformée de Fourier (chapitre 13), nous allons considérer une décomposition en somme de $e^{\imath nx} = \cos(nx) + \imath \sin(nx)$ plutôt qu'une décomposition en somme de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$. (Typiquement, nous montrons (12.3) ci-dessous plutôt que (12.1).) Le passage d'une décomposition à l'autre se fait à travers les formules d'Euler. L'avantage des exponentielles est que les formules sont plus symétriques.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et suffisamment lisse (de classe C^1 suffit, voir la section 12.4), alors nous avons

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n(f)\, e^{\imath nx} := \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \sum_{n=M}^{n=N} c_n(f)\, e^{\imath nx},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{12.3}$$

avec

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)\, e^{-\imath ny}\, dy.^{\dagger} \tag{12.4}$$

La définition (12.4) s'obtient à partir du *calcul formel*[†] suivant (avec δ_m^n le symbole de Kronecker)[‡] :

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n(f)\, e^{\imath nx} \\
&\implies \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath nx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m(f)\, e^{\imath mx}\, e^{-\imath nx}\, dx \\
&\implies \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath nx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m(f) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{\imath mx}\, e^{-\imath nx}\, dx}_{= 2\pi\, \delta_m^n} \\
&\implies \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath nx}\, dx = \sum_{m=-\infty}^{m} c_m(f)\, \delta_m^n = c_n(f).
\end{aligned}$$

[†] En analyse, un *calcul formel* est un calcul que l'on ne peut pas nécessairement justifier. En dehors de l'analyse, cette expression est synonyme de *calcul symbolique* **Calcul formel (Wikipédia)** En anglais, il n'y a pas d'ambiguïté : *formal computation* en analyse, vs *symbolic calculus*.

[‡] Le *symbole de Kronecker* δ_i^j, avec $i, j \in I$, est défini par $\delta_i^j := \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Ce calcul permet de dégager la définition (12.4). Ses lignes *formelles* sont la première et la troisième, car il faut pouvoir justifier (12.3) et la permutation de la somme et de l'intégrale.

Dans ce chapitre, nous allons justifier et donner un sens à la première égalité (12.3). *Ce sens ne sera pas, en général, celui de la deuxième égalité de* (12.3).

La section 12.1 permet de faire le lien entre (12.4) et la décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée. Ce sujet sera revu dans le chapitre 14, dans le cadre des espaces de Hilbert ; nous donnerons ici le cadre minimal permettant de comprendre (12.4) si $f \in L^2(I)$.[†]

La section 12.2 est consacrée à l'égalité (12.3) si $f \in L^2(I)$. Le résultat principal est le *théorème de Fatou* 12.4 qui affirme que

$$f = \lim_{\substack{M\to-\infty\\ N\to\infty}} \sum_{n=M}^{n=N} c_n(f)\, e^{in\cdot} \text{ dans } L^2(I).$$

Ce résultat est complété par l'*égalité de Parseval* (12.14)

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$$

et par le *théorème de Riesz-Fischer* 12.8.

Un autre résultat significatif qui sera obtenu dans cette section est le *lemme de Riemann-Lebesgue* 12.9.

La section 12.3 est dédiée au comportement ponctuel[‡] de la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{inx}$: plus spécifiquement, on s'intéresse à la validité de (12.3) (ou d'une variante de (12.3)) à x fixé. Pour des fonctions dérivables par morceaux, cette convergence (énoncée proprement) est le contenu du *théorème de Dirichlet* 12.13.

Dans la cas d'un fonction continue par morceaux, la série de Fourier peut ne pas converger. La bonne notion de convergence est celle de convergence *en moyenne* ; le résultat de convergence correspondant est le *théorème de Fejér* 12.15.

La section 12.4 est dédiée à la convergence uniforme ou normale de la série de Fourier. Cette section est plus avancée que les autres et peut servir de base à la préparation à l'agrégation. Notons, dans cette introduction, deux résultats marquants et simples à énoncer (Corollaire 12.25) :

[†]Dans la pratique, j'enseigne le chapitre 14 avant ce chapitre, ce qui simplifie les preuves, notamment dans la section 12.2, et permet de faire le lien avec les bases hilbertiennes. Néanmoins, les preuves de cette section, comme écrites, ne reposent pas sur la connaissance des bases hilbertiennes.

[‡]*Ponctuel* : en tout point $x \in I$.

a) Si $f(0) = f(2\pi)$ et il existe $\alpha > 0$ et $C < \infty$ tels que $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$, $\forall\, x, y \in [0, 2\pi]$, alors $\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{\imath kx}$ converge uniformément vers f quand $n \to \infty$.

b) Si $f(0) = f(2\pi)$ et il existe $\alpha > 1/2$ et $C < \infty$ tels que $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$, $\forall\, x, y \in [0, 2\pi]$, alors $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{inx}$ converge normalement vers f.

Dans la section 12.5, nous mentionnons sans preuve d'autres résultats célèbres de (non) convergence.

Compétences minimales attendues.

a) Savoir utiliser l'égalité de Parseval, le théorème de Fatou et le théorème de Riesz-Fischer.

b) Savoir utiliser le théorème de Dirichlet. ◇

12.1 Un peu d'algèbre bilinéaire

Soit H un espace vectoriel complexe, muni d'un produit scalaire complexe $<\,,\,>$,[†] qui induit la norme $\|x\| := < x, x >^{1/2}$, $\forall\, x \in H$.

Si $(e_j)_{j\in J} \subset H$ est une famille orthonormée,[‡] alors pour tout $x \in H$ et toute famille *finie* $L \subset J$ nous avons les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \Big\| \sum_{j\in L} < x, e_j > \, e_j \Big\|^2 + \Big\| x - \sum_{j\in L} < x, e_j > \, e_j \Big\|^2 \\ &= \sum_{j\in L} | < x, e_j > |^2 + \Big\| x - \sum_{j\in L} < x, e_j > \, e_j \Big\|^2, \end{aligned} \tag{12.5}$$

d'où en particulier

$$\Big\| \sum_{j\in L} < x, e_j > \, e_j \Big\|^2 = \sum_{j\in L} | < x, e_j > |^2 \leq \|x\|^2. \tag{12.6}$$

$$\begin{aligned} &\text{Si } x \in \text{Vect}\,\{e_j\,;\, j \in L\}, \text{ alors } x = \sum_{j\in L} < x, e_j > \, e_j \\ &\qquad\qquad \text{et } \|x\|^2 = \sum_{j\in L} | < x, e_j > |^2. \end{aligned} \tag{12.7}$$

[†]Nous considérons un produit scalaire *linéaire* dans le premier argument et *antilinéaire* dans le deuxième argument. L'exemple typique est $\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto z_1\overline{z_2}$. C'est le produit scalaire des mathématiciens. Les physiciens considèrent des applications antilinéaires dans le premier argument, linéaires dans le deuxième argument. L'exemple typique est $\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto \overline{z_1} z_2$.

[‡]Donc $< e_j, e_\ell >= 0$, $\forall\, j \neq \ell$ et $< e_j, e_j >= 1$, $\forall\, j$.

Nous allons appliquer ceci à l'espace $L^2 := L^2(]0, 2\pi[)$, avec le produit scalaire

$$< f, g >:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g}(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\, \overline{g}\, d\lambda_1. \tag{12.8}$$

12.1 Notation. Si $n \in \mathbb{Z}$,

$$e_n(x) := e^{\imath nx},\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{12.9}$$

(Pour être plus précis, nous travaillons avec $[e_n]$ plutôt qu'avec e_n. Néanmoins, par souci de simplicité, dans les formules nous identifions e_n à sa classe.) ◇

12.2 Définition. Si $f \in L^1 := L^1(]0, 2\pi[)$, le n^{e} *coefficient de Fourier* de f ($n \in \mathbb{Z}$) est

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{e_n}(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath nx}\, dx. \tag{12.10}$$

Si $f \in L^2$, nous avons $c_n(f) =< f, e_n >$.

Il est immédiat que $c_n(f)$ dépend uniquement de la classe de f.

La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant orthonormée (exercice 12.3 b)), les relations (12.5), (12.7), respectivement (12.6) avec $J := \mathbb{Z}$ et $L := \{n \in \mathbb{Z}\,;\, n_0 \le n \le n_1\}$ donnent l'*inégalité de Bessel*

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{n_1} |c_n(f)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=n_0}^{n_1} c_n(f)\, e^{\imath nx} \right|^2 dx \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \|f\|_{L^2}^2,\ \forall\, f \in L^2(]0, 2\pi[) \end{aligned} \tag{12.11}$$

et l'identité

$$\|f\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{n=n_0}^{n_1} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot} \right\|_{L^2}^2 + \left\| f - \sum_{n=n_0}^{n_1} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot} \right\|_{L^2}^2. \tag{12.12}$$

Exercices

12.3 Exercice.

a) Montrer que (12.8) définit un produit scalaire sur L^2.

b) Montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par (12.9) est orthonormée dans L^2 muni du produit scalaire (12.8). ◇

12.2 Séries de Fourier dans L^2

12.4 Théorème (Théorème de Fatou et égalité de Parseval)**.** Soit $f \in L^2 = L^2(]0, 2\pi[)$. Alors :

a) (Théorème de Fatou) Nous avons

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{in\cdot} \\ &= \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \sum_{n=M}^{n=N} c_n(f)\, e^{in\cdot} \text{ dans } L^2. \end{aligned} \tag{12.13}$$

b) Nous avons l'*égalité de Parseval*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \|f\|_{L^2}^2. \tag{12.14}$$

12.5 Remarque. Une somme de la forme $x \mapsto \sum_{n=M}^{n=N} c_n(f)\, e^{inx}$ est un *polynôme trigonométrique*, c'est-à-dire une *somme de la forme* $\sum_n a_n e_n$, *avec un nombre fini de termes*. ◇

12.6 Définition. Si $f \in L^1$, nous posons

$$S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k. \tag{12.15}$$

En combinant le théorème 12.4 et le corollaire 10.29, nous obtenons la conséquence suivante.

12.7 Corollaire. Si $f \in \mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(]0, 2\pi[)$, alors il existe une sous-suite $(n_j)_j$ de $\mathbb{N}$ telle que

$$S_{n_j}(f)(x) \to f(x) \text{ quand } j \to \infty, \text{ pour presque tout } x \in]0, 2\pi[. \qquad \diamond \tag{12.16}$$

L'inégalité de Bessel (12.11) implique que, si $f \in L^2$, alors la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de f appartient à $\ell^2(\mathbb{Z})$. Remarquablement, la réciproque est vraie. C'est le contenu du théorème suivant.

12.8 Théorème (Théorème de Riesz-Fischer)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite telle que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Alors il existe une et une seule classe de fonctions $f \in L^2 = L^2(]0, 2\pi[)$

telle que $c_n(f) = a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

La preuve du théorème 12.4 se fait par densité, en commençant par des fonctions de $C_c^\infty(]0, 2\pi[)$. C'est une situation analogue à celle rencontrée dans la section 11.3. Voici un autre résultat important dont la preuve est dans cet esprit.

12.9 Lemme (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** Soit $f \in L^1 = L^1(]0, 2\pi[)$. Nous avons $c_n(f) \to 0$ quand $|n| \to \infty$. ◇

Pour une généralisation de ce lemme, avec une preuve à nouveau par densité, voir l'exercice # 38 de la feuille d'exercices de synthèse et avancés.

Exercices

12.10 Exercice. Soit

$$P = \sum_{n\in I} a_n\, e^{in\cdot} = \sum_{n\in I} a_n\, e_n$$

(avec $I \subset \mathbb{Z}$ fini) un polynôme trigonométrique. Montrer que $P \in \mathscr{L}^1$ et que

$$c_n(P) = \begin{cases} a_n, & \text{si } n \in I \\ 0, & \text{si } n \notin I \end{cases}. \qquad \diamond$$

12.11 Exercice. Que donne l'égalité de Parseval pour $f(x) = x$? ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 12.4. L'ingrédient fondamental dans la preuve est le résultat suivant de densité, qui sera démontré plus tard.

12.12 Théorème. Soit $g \in C([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ telle que $g(0) = g(2\pi)$. Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe un polynôme trigonométrique P tel que $|g(x) - P(x)| < \varepsilon$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$.

De manière équivalente, soit $C_{\text{pér}} := \{g \in C([0, 2\pi]; \mathbb{C})\,;\, g(0) = g(2\pi)\}$, muni de la norme uniforme. Alors les polynômes trigonométriques sont denses dans $C_{\text{pér}}$. ◇

Démonstration du théorème 12.4 (en admettant le théorème 12.12).

a) Soit $f \in \mathscr{L}^2$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit $g \in C_c^\infty(]0, 2\pi[)$ telle que $\|f - g\|_{L^2} < \varepsilon$ (l'existence de g suit du théorème 11.12). Soit P un polynôme trigonométrique tel que $|g(x) - P(x)| < \varepsilon$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$ (l'existence de P suit du théorème 12.12). Notons que $\|g - P\|_{L^2} < \varepsilon$, ce qui implique $\|f - P\|_{L^2} < 2\,\varepsilon$.

Soient $n_0, n_1 \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \sum_{n=n_0}^{n_1} a_n\, e_n$. Si $M \le n_0$ et $N \ge n_1$, nous avons

$$\sum_{n=M}^{N} c_n(P)\, e_n = P \tag{12.17}$$

(justifier, en utilisant l'exercice 12.10).

Pour de tels M et N, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\Big\| f - \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n \Big\|_{L^2} &\le \|f - P\|_{L^2} + \Big\| P - \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n \Big\|_{L^2} \\
&= \|f - P\|_{L^2} + \Big\| \sum_{n=M}^{N} c_n(P)\, e_n - \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n \Big\|_{L^2} \\
&= \|f - P\|_{L^2} + \Big\| \sum_{n=M}^{N} c_n(P - f)\, e_n \Big\|_{L^2} \\
&\le \|f - P\|_{L^2} + \|P - f\|_{L^2} < 4\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Au passage, nous avons utilisé : (12.17), la linéarité de l'application $f \mapsto c_n(f)$ (la justifier) et l'inégalité

$$\Big\| \sum_{n=n_0}^{n_1} c_n(g)\, e_n \Big\|_{L^2} \le \|g\|_{L^2},\ \forall\, g \in L^2,$$

qui découle de (12.11).

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, nous obtenons que

$$\lim_{\substack{M \to -\infty \\ N \to \infty}} \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n = f \text{ dans } \mathscr{L}^2. \tag{12.18}$$

b) découle de (12.7) et de (12.18). En effet,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \lim_{\substack{M \to -\infty \\ N \to \infty}} \sum_{n=M}^{N} |c_k(f)|^2 = \lim_{\substack{M \to -\infty \\ N \to \infty}} \Big\| \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n \Big\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2. \qquad \text{CQFD}$$

Démonstration du théorème 12.8. Existence. Soit $P_n := \sum_{k=-n}^{n} a_k\, e_k$. L'identité (12.7) donne, pour $0 \le n < m$:

$$\|P_m - P_n\|_{L^2}^2 = \Big\| \sum_{n+1 \le |k| \le m} a_k\, e_k \Big\|_{L^2}^2 = \sum_{n+1 \le |k| \le m} |a_k|^2 \to 0 \text{ quand } n, m \to \infty.$$

Il s'ensuit que $(P_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}^2$. Par complétude de $\mathscr{L}^2$ (théorème de Fatou 10.28), il existe $f \in \mathscr{L}^2$ telle que $P_n \to f$ dans $\mathscr{L}^2$ quand $n \to \infty$. Si $n \ge |k|$, alors $c_k(P_n) = a_k$ (exercice 12.10), d'où (justifier)

$$\begin{aligned}
|c_k(f) - a_k| &= |c_k(f) - c_k(P_n)| = |c_k(f - P_n)| = |< f - P_n, e_k >| \\
&\le \|f - P_n\|_{L^2}\, \|e_n\|_{L^2} = \|f - P_n\|_{L^2} \to 0 \text{ quand } n \to \infty,
\end{aligned}$$

ce qui implique $c_k(f) = a_k$ pour tout k.

Unicité. Notons que, si $c_k(f) = c_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, avec $f, g \in L^2$, alors l'égalité de Parseval appliquée à $f - g$ donne $f = g$. CQFD

Démonstration du lemme 12.9. Soient $f \in \mathscr{L}^1$ et $\varepsilon > 0$. Soit $g \in C_c^\infty(]0, 2\pi[)$ telle que $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$ (l'existence de g suit du théorème 11.12).

Si $n \neq 0$, alors une intégration par parties donne

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\, e^{-\imath nx}\, dx = \frac{1}{2\imath\, \pi\, n} \int_0^{2\pi} g'(x)\, e^{-\imath nx}\, dx,$$

d'où $|c_n(g)| \leq \dfrac{1}{|n|} \max\limits_{[0,2\pi]} |g'| \to 0$ quand $|n| \to \infty$.

Il existe donc n_0 tel que $|c_n(g)| < \varepsilon$ si $|n| \geq n_0$. Pour un tel n, nous avons

$$|c_n(f)| \leq |c_n(g)| + |c_n(f - g)| \leq |c_n(g)| + \|f - g\|_{L^1} < 2\,\varepsilon.$$ CQFD

12.3 Comportement ponctuel des séries de Fourier

Dans cette section, nous travaillons avec des *fonctions* (au lieu de *classes*). La question fondamentale étudiée est le comportement de la suite

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{\imath kx},\ n \in \mathbb{N}, x \in I.^{\dagger}$$

Il sera commode de travailler avec des fonctions définies d'abord sur $[0, 2\pi[$, qui sont prolongées par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$. Par exemple, si $f(x) = x$, $x \in [0, 2\pi[$, alors le prolongement 2π-périodique de f est

$$f(x) = x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}\right),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.^{\ddagger}$$

Toutes les fonctions définies dans cette section sont supposées 2π-périodiques et intégrables sur $I =]0, 2\pi[$.

Le premier résultat fondamental de cette section est le *théorème de Dirichlet*.

[†] L'étude du comportement de $\sum_{k=m}^{n} c_k(f)\, e^{\imath kx}$ quand $m \to -\infty$ et $n \to \infty$ *de manière indépendante* est un sujet très délicat qui dépasse largement le cadre de ce cours. Dans cette section, nous considérons uniquement le cas où $m = -n$.

[‡] $E(x)$ désigne la partie entière de x.

12.13 Théorème.

a) (Critère de Dini) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. S'il existe deux nombres $f(x_0\pm)$ et une fonction $G \in \mathscr{L}^1(]0,\pi[)$ telle que

$$|f(x_0\pm) - f(x_0 \pm y)| \leq y\, G(y), \forall\, 0 < y < \pi, \tag{12.19}$$

alors

$$S_n(f)(x_0) \to \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.20}$$

b) En particulier, (12.20) est vraie si f a des limites latérales $f(x_0\pm)$ en x_0, et les limites

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x_0 \pm y) - f(x_0\pm)}{y}$$

existent et sont finies.

c) (Théorème de Dirichlet) En particulier, (12.20) est vraie en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ si f est « dérivable par morceaux ».[†]

Si, dans le théorème précédent, nous voulons abaisser la condition de régularité sur f de « dérivable » à « continue », alors la bonne notion de convergence est celle de convergence *en moyenne* (*théorème de Fejér* 12.15), la moyenne étant définie ci-dessous.

12.14 Définition. Si $f \in \mathscr{L}^1$, nous posons

$$T_n(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots S_n(f)}{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.^{\ddagger} \tag{12.21}$$

12.15 Théorème (Théorème de Fejér)**.**

a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f a des limites latérales finies $f(x_0\pm)$ en x_0, alors

$$T_n(f)(x_0) \to \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.22}$$

b) Si f est continue, alors $T_n(f) \to f$ uniformément quand $n \to \infty$.

[†] Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dérivable par morceaux si, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ et deux fonctions dérivables, $f_- : [x_0 - \varepsilon, x_0] \to \mathbb{C}$ et $f_+ : [x_0, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{C}$ telles que $f_- = f$ sur $[x_0 - \varepsilon, x_0[$, respectivement $f_- = f$ sur $]x_0, x_0 + \varepsilon]$. Dans ce cas, nous avons $f(x_0\pm) = f_\pm(x_0)$.

[‡] $(T_n(f))_n$ est la *moyenne de Cesàro* de $(S_n(f))_n$.

De manière équivalente, soit $f \in C([0,2\pi])$ telle que $f(0) = f(2\pi)$. Alors $T_n(f) \to f$ uniformément sur $[0,2\pi]$ quand $n \to \infty$.

Exercices

L'exercice suivant est *fondamental*. Il montre que, dans les calculs, on peut remplacer $]0,2\pi[$ par tout intervalle de longueur 2π.

12.16 Exercice. Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0,2\pi[$. Montrer que :

a) f est intégrable sur tout intervalle borné.

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(y)\,dy = \int_a^{a+2\pi} f(y)\,dy, \forall\, a \in \mathbb{R}$. ◇

Les *noyaux de Dirichlet* interviennent dans la preuve du *théorème de Dirichlet* 12.13.

12.17 Définition (Noyau de Dirichlet)**.** Le n^{e} *noyau de Dirichlet* ($n \in \mathbb{N}$) est

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx},\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \qquad \diamond \quad (12.23)$$

12.18 Exercice. Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0,2\pi[$. Montrer que :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\,D_n(y)\,dy \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,D_n(y)\,dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \qquad (12.24)$$

$$\begin{aligned} D_n(y) =& \begin{cases} \dfrac{\sin((n+1/2)y)}{\sin(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2n+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases} \\ =& \begin{cases} \sin(ny)\,\cot(y/2) + \cos(ny), & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2n+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}, \end{aligned} \qquad (12.25)$$

$$\int_0^{\pi} D_n(y)\,dy = \int_{-\pi}^{0} D_n(y)\,dy = \pi. \qquad \diamond \quad (12.26)$$

Les *noyaux de Fejér* interviennent dans la preuve du théorème de Fejér 12.15.

12.19 Définition (Noyau de Fejér)**.** Le n^{e} *noyau de Fejér* ($n \in \mathbb{N}$) est

$$F_n := \frac{D_0 + \cdots + D_n}{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \qquad \diamond \quad (12.27)$$

12.20 Exercice. Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$. Montrer les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} T_n(f)(x) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\,F_n(y)\,dy \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,F_n(y)\,dy,\ \forall\, x\in\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{12.28}$$

$$F_n(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2[(n+1)y/2]}{(n+1)\,\sin^2(y/2)}, & \text{si } y\notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ n+1, & \text{si } y\in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}, \tag{12.29}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\,dy = 2\pi \tag{12.30}$$

$$\int_0^{\pi} F_n(y)\,dy = \int_{-\pi}^{0} F_n(y)\,dy = \pi. \tag{12.31}$$

Par ailleurs, montrer que

a) $F_n(y)\geq 0$, $\forall\, n$, $\forall\, y\in\mathbb{R}$.

b) Pour tout $0<\delta<\pi$, $F_n\to 0$ uniformément sur $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ quand $n\to\infty$.

c) Pour tout $0<\delta<\pi$,

$$\int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} F_n(y)\,dy \to 0 \text{ quand } n\to\infty. \qquad \diamond \tag{12.32}$$

Démonstrations

Démonstration du théorème 12.13. Étape 1. Preuve de (12.20) sous l'hypothèse (12.19). Posons

$$g(y) := \begin{cases} \dfrac{[f(x_0-y)-f(x_0-)]\,\cos(y/2)}{\sin(y/2)}, & \text{si } 0<y<\pi \\ \dfrac{[f(x_0-y)-f(x_0+)]\,\cos(y/2)}{\sin(y/2)}, & \text{si } -\pi<y<0 \end{cases}$$

et

$$h(y) := \begin{cases} f(x_0-y)-f(x_0-), & \text{si } 0<y<\pi \\ f(x_0-y)-f(x_0+), & \text{si } -\pi<y<0 \end{cases}.$$

Notons que

$$|g(y)|\leq \frac{y}{\sin(y/2)} G(|y|),\ \forall\, 0<|y|<\pi,$$

avec G comme dans (12.19). La fonction

$$]-\pi,\pi[\setminus\{0\}\ni y\mapsto \frac{y}{\sin(y/2))}$$

se prolongeant par continuité en 0 et $\pm\pi$, il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$|g(y)| \leq C\, G(|y|),\ \forall\, 0 < |y| < \pi. \tag{12.33}$$

Par ailleurs, g est mesurable (justifier). De (12.19) et (12.33), g est intégrable sur $]-\pi,\pi[$ (détailler).

De manière analogue, $|h(y)| \leq |y|G(|y|) \leq \pi G(|y|)$, d'où h est intégrable sur $]-\pi,\pi[$.

En utilisant l'exercice 12.18, nous obtenons, avec $a := [f(x_0+) + f(x_0-)]/2$ (détailler)

$$\begin{aligned}
S_n f(x_0) - a =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-y)\, D_n(y)\, dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0+)\, D_n(y)\, dy \\
&- \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x_0-)\, D_n(y)\, dy \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} (f(x_0-y) - f(x_0+))\, D_n(y)\, dy \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x_0-y) - f(x_0-))\, D_n(y)\, dy \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ny)\, g(y)\, dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ny)\, h(y)\, dy \\
=& \frac{1}{4\imath\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\, [e^{\imath ny} - e^{-\imath ny}]\, dy + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(y)\, [e^{\imath ny} + e^{-\imath ny}]\, dy \\
=& \frac{1}{2\imath}[c_{-n}(g) - c_n(g)] + \frac{1}{2}[c_{-n}(h) + c_n(h)] \to 0 \text{ quand } n \to \infty,
\end{aligned}$$

la conclusion finale étant une conséquence du lemme de Riemann-Lebesgue.

Étape 2. Preuve des items b) et c). Il suffit de montrer que les hypothèses des items b) et c) impliquent l'existence d'une fonction intégrable G ayant la propriété (12.19). Posons

$$G(y) := \left|\frac{f(x_0+y) - f(x_0+)}{y}\right| + \left|\frac{f(x_0-y) - f(x_0-)}{y}\right|,\ \forall\, 0 < y < \pi.$$

Alors G est mesurable et satisfait, par construction, (12.19).

Si f est comme dans l'item b), alors G a une limite finie en 0, et donc G est bornée (et donc intégrable) dans un voisinage $]0,\varepsilon[$ de 0. Par ailleurs, si $y \geq \varepsilon$, nous avons

$$G(y) \leq \varepsilon^{-1}(|f(x_0+y)| + |f(x_0+)| + |f(x_0-y)| + |f(x_0-)|) := H(y),$$

et cette majorante est intégrable (justifier), d'où G est intégrable.

Enfin, l'item c) est un cas particulier de l'item b). CQFD

Démonstration du théorème 12.15. Étape 1. Preuve de l'item a). Soit $\varepsilon > 0$. Soit $0 < \delta < \pi$ tel que

$$0 < y \leq \delta \implies |f(x_0 \pm y) - f(x_0\pm)| \leq \varepsilon. \tag{12.34}$$

Posons

$$m_n := \max\{F_n(y)\,;\, \delta \leq |y| \leq \pi\},$$

de sorte que

$$\lim_{n\to\infty} m_n = 0 \tag{12.35}$$

(exercice 12.20).

En utilisant l'exercice 12.20 et (12.34), nous obtenons, avec $a := [f(x_0+) + f(x_0-)]/2$:

$$\begin{aligned}
|T_n f(x_0) - a| =& \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,F_n(y)\,dy - \pi\, f(x_0+) - \pi\, f(x_0-)\right| \\
\leq& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} |f(x-y) - f(x_0+)|\,F_n(y)\,dy \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} |f(x-y) - f(x_0-)|\,F_n(y)\,dy \\
\leq& \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(y)\,dy \\
&+ \frac{m_n}{2\pi}\int_{[\delta,\pi]} (|f(x_0+)| + |f(x_0-)| + |f(x_0-y)| + |f(x_0+y)|)\,dy \\
\leq& \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\,dy + \frac{m_n}{2}(|f(x_0+)| + |f(x_0-)|) + \frac{m_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \\
=& \varepsilon + \frac{m_n}{2}(|f(x_0+)| + |f(x_0-)| + 2\|f\|_{L^1}) \to \varepsilon \text{ quand } n\to\infty.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'il existe n_0 tel que $|T_n f(x_0) - a| \leq 2\varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$.

Étape 2. Preuve de l'item b). Rappelons qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et uniformément continue. Il s'ensuit qu'il existe un δ indépendant de x_0 tel que (12.34) soit satisfaite, et pour ce δ nous avons, en reprenant les calculs précédents,

$$\begin{aligned}
|T_n f(x_0) - a| \leq& \varepsilon + \frac{m_n}{2}(|f(x_0+)| + |f(x_0-)| + 2\|f\|_{L^1}) \\
\leq& \varepsilon + \frac{m_n}{2}(2\|f\|_{L^\infty} + 2\|f\|_{L^1}) \to \varepsilon \text{ quand } n\to\infty.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'existence d'un n_0 *indépendant de* x_0 tel que $|T_n f(x_0) - a| \leq 2\varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$, d'où la conclusion de l'item b). CQFD

Démonstration du théorème 12.12. Au vu du théorème de Fejér (item b)), il suffit de prendre $P := T_n(g)$ avec n suffisamment grand. CQFD

12.4 Comportement global des séries de Fourier

La question fondamentale étudiée dans cette section est celle de la convergence uniforme ou normale de la suite $(S_n(f))$.[†] Notons que la convergence *normale* de la série *de fonctions* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\,e^{in\cdot}$ revient à la convergence de la série *numérique* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|$.

[†]Pour la convergence de la suite $(T_n(f))$, le théorème de Fejér 12.15 fournit une réponse convenable.

Dans ce qui suit, *les fonctions f sont continues*[†] *et 2π-périodiques.*Elles sont donc en particulier *uniformément continues sur $\mathbb{R}$.*[‡]

La philosophie générale est que plus f est lisse, plus la convergence de sa série de Fourier est forte. Notons, par exemple que, si $f \in C^2$, alors

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{in\cdot}, \tag{12.36}$$

la série de (12.36) étant normalement convergente (exercice 12.26). Une quantité qui mesure la continuité de f est le *module de continuité*.

12.21 Définition. Le *module de continuité* de f est $\delta \mapsto \omega(\delta)$, où

$$\omega(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|\,;\, x, y \in \mathbb{R},\, |x-y| \le \delta\},\ \forall\, 0 < \delta \le 2\pi.^{\S} \qquad \diamond \tag{12.37}$$

L'interprétation intuitive de la taille de ω est que plus $\omega(\delta)$ tend vers 0 rapidement quand $\delta \to 0$, plus la fonction f est lisse. (Voir néanmoins l'exercice 12.28.)

On peut montrer que, dans (12.37), le $\sup$ est un $\max$ (exercice 12.27).

Il sera instructif d'illustrer la calcul de $\omega(\delta)$ et les résultats généraux qui suivent sur les fonctions hölderiennes, qui sont une généralisation des fonctions lipschitziennes.

12.22 Définition. Soit $0 < \alpha \le 1$. Une fonction $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est *α-hölderienne* si $|f|_{C^\alpha} < \infty$, où

$$|f|_{C^\alpha} := \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}\,;\, x, y \in [0, 2\pi],\, x \neq y \right\}.$$

Une fonction est *hölderienne* si elle est α-hölderienne pour un α. $\diamond$

Si f est α-hölderienne sur $[0, 2\pi]$ et, de plus, $f(0) = f(2\pi)$, alors le prolongement par périodicité de f est continu et nous avons (exercice 12.29)

$$\omega(\delta) \le 2|f|_{C^\alpha}\, \delta^\alpha,\ 0 < \delta \le 2\pi. \tag{12.38}$$

12.23 Théorème. (Critère de Dini-Lipschitz) Si

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta)\, |\ln \delta| = 0, \tag{12.39}$$

alors $S_n(f) \to f$ uniformément quand $n \to \infty$. $\diamond$

[†]On ne peut espérer de la convergence uniforme de $(S_n(f))$ en l'absence de la continuité de f, car une limite uniforme de fonctions continues est encore continue.

[‡]Voir l'étape 2 de la preuve du théorème 12.15.

[§]La définition la plus courante du module de continuité est légèrement différente, mais pour énoncer les résultats de cette section la définition via la formule (12.37) convient.

12.24 Théorème. Si

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta^{3/2}}\, d\delta < \infty, \tag{12.40}$$

alors la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot}$ converge normalement vers f. ◇

En combinant les théorèmes 12.23 et 12.24 avec l'inégalité (12.38), nous obtenons le résultat important suivant.

12.25 Corollaire. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f(0) = f(2\pi)$.

a) Si f est α-hölderienne pour un $\alpha > 0$, alors $\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{\imath k\cdot}$ converge uniformément vers f quand $n \to \infty$.

b) (Théorème de Bernstein) Si f est α-hölderienne pour un $\alpha > 1/2$ (donc, en particulier, si f est de classe C^1, ou si f est lipschitzienne), alors la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot}$ converge normalement et sa somme est f.

Exercices

12.26 Exercice. Soit $f \in C^k(\mathbb{R})$ une fonction 2π-périodique. Montrer que

$$|c_n(f)| \le \frac{\left\|f^{(k)}\right\|_{L^\infty}}{|n|^k},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^*.$$

En particulier, si $f \in C^2$, montrer que sa série de Fourier $x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n x}$ converge normalement, et que la somme de la série est f. ◇

12.27 Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. Soit ω son module de continuité,

$$\omega(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|\,;\, x, y \in \mathbb{R},\, |x - y| \le \delta\},\ \forall\, 0 < \delta \le 2\pi. \tag{12.41}$$

1. Montrer que, dans (12.41), le $\sup$ est un $\max$.
2. Montrer que ω est continue et croissante. ◇

12.28 Exercice. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $\omega(\delta) = o(\delta)$ quand $\delta \to 0$. Montrer que f est constante (et réciproquement). ◇

12.29 Exercice. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction α-hölderienne telle que $f(0) = f(2\pi)$. Nous notons encore f son prolongement par 2π-périodicité.

1. Montrer que
$$\omega(\delta) \le 2\,|f|_{C^\alpha}\delta^\alpha, \forall\, 0 < \delta \le 2\pi. \tag{12.42}$$
2. Améliorer (12.42) à
$$\omega(\delta) \le 2^{1-\alpha}\,|f|_{C^\alpha}\delta^\alpha, \forall\, 0 < \delta \le 2\pi.$$ ◇

12.30 Exercice. Montrer que $S_n(T_n(f)) = T_n(f)$. ◇

12.31 Exercice. Montrer que

$$\|S_n(f)\|_{L^\infty} \leq \|D_n\|_{L^1}\|f\|_{L^\infty},\ \forall\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable, bornée, } 2\pi\text{-périodique.} \diamond \quad (12.43)$$

12.32 Exercice.

1. Montrer que

$$|D_n(y)| \leq \frac{\pi}{|y|} \min\left((n+1/2)|y|, 1\right),\ \forall\, n \geq 0,\ \forall\, 0 < |y| \leq \pi. \quad (12.44)$$

On pourra utiliser les inégalités suivantes :

$$|\sin t| \leq \min\left(|t|, 1\right), \forall\, t \in \mathbb{R},$$
$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t,\ \forall\, t \in [0, \pi/2].$$

2. En déduire que

$$\|D_n\|_{L^1} \leq 1 + \ln \pi + \ln(n+1/2),\ \forall\, n \geq 0. \quad \diamond \quad (12.45)$$

12.33 Exercice. Montrer que

$$|F_n(y)| \leq \frac{\pi^2}{(n+1)y^2} \min\left(((n+1)y/2)^2, 1\right),\ \forall\, n \geq 0,\ \forall\, 0 < |y| \leq \pi. \quad \diamond \quad (12.46)$$

12.34 Exercice. Si f est localement intégrable et 2π-périodique, montrer que $c_n(f(\cdot + h)) = e^{inh} c_n(f)$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 12.23. Étape 1. Stratégie générale de la preuve. La fonction f étant continue, nous avons $T_n(f) \to f$ uniformément (théorème 12.15 item b)). Il suffit donc de montrer que $S_n(f) - T_n(f) \to 0$ uniformément. En notant que $T_n(f) = S_n(T_n(f))$ (exercice 12.30), nous devons montrer que

$$S_n(f - T_n(f)) \to 0 \text{ uniformément quand } n \to \infty. \quad (12.47)$$

La preuve de (12.47) repose sur les exercices 12.31 et 12.32, qui donnent

$$\|S_n(f - T_n(f))\|_{L^\infty} \leq (1 + \ln \pi + \ln(n+1/2))\|f - T_n(f)\|_{L^\infty}. \quad (12.48)$$

Pour compléter la preuve du théorème, nous allons obtenir les résultats suivants :

$$\|f - T_n(f)\|_{L^\infty} \leq \frac{\pi}{2}\omega(2/(n+1)) + \frac{\pi}{n+1}\int_{2/(n+1)}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\, dy. \quad (12.49)$$

Sous l'hypothèse (12.39), nous avons $\lim_{\delta \to 0} \delta\, |\ln \delta| \int_\delta^\pi \frac{\omega(y)}{y^2}\, dy = 0,$ (12.50)

résultats qui, combinés avec (12.48), permettent de conclure (vérifier).

Étape 2. Preuve de (12.49). En reprenant le début de la preuve du théorème 12.15, et en utilisant les propriétés de F_n (exercices 12.20 et 12.27), la définition de ω, et la monotonie de ω (exercice 12.27), nous obtenons successivement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |T_n f(x) - f(x)| =& \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-y) - f(x)]\, F_n(y)\, dy \right| \\ \leq& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega(|y|)\, F_n(y)\, dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega(y)\, F_n(y)\, dy \\ \leq& \frac{\pi(n+1)}{4} \int_0^{2/(n+1)} \omega(y)\, dy + \frac{\pi}{n+1} \int_{2/(n+1)}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\, dy \\ \leq& \frac{\pi^2}{2} \omega(2/(n+1)) + \frac{\pi}{n+1} \int_{2/(n+1)}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\, dy. \end{aligned} \tag{12.51}$$

On obtient (12.49) en prenant, dans (12.51), le sup sur x.

Étape 3. Preuve de (12.50). La règle de l'Hospital « $?/\infty$ », qui s'applique car ω est continue (exercice 12.27), donne, grâce à l'hypothèse (12.39),

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \to 0} \delta\, |\ln \delta| \int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\, dy &= \lim_{\delta \to 0} \frac{\displaystyle\int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\, dy}{\dfrac{-1}{\delta\, \ln \delta}} = \lim_{\delta \to 0} \frac{-\dfrac{\omega(\delta)}{\delta^2}}{\dfrac{1}{\delta^2\, \ln \delta} + \dfrac{1}{\delta^2\, (\ln \delta)^2}} \\ &= \lim_{\delta \to 0} \frac{-\omega(\delta)\, \ln \delta}{1 + \dfrac{1}{\ln \delta}} = 0. \end{aligned}$$

CQFD

Démonstration du théorème 12.24. Rappelons que notre principal but est de montrer la convergence de la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|$.

Étape 1. Utilisation de l'égalité de Parseval et du module de continuité. Pour $0 < h \leq 2\pi$, soit $f_h(x) := f(x+h)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$c_n(f_h) = e^{inh} c_n(f) \tag{12.52}$$

(exercice 12.34) et, clairement,

$$\|f_h - f\|_{L^2} \leq \|f_h - f\|_{L^\infty} \leq \omega(h). \tag{12.53}$$

De (12.52), (12.53) et l'égalité de Parseval (12.14), nous obtenons

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{inh} - 1|^2 |c_n(f)|^2 \leq \omega^2(h),\ \forall\, 0 < h \leq 2\pi. \tag{12.54}$$

Étape 2. Contrôle de $\sum |c_n(f)|$ *si* $|n|$ *est de l'ordre de* $1/h$. Prenons $h := 1/2^\ell$, avec $\ell \in \mathbb{N}$, et les $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $2^\ell \leq |n| < 2^{\ell+1}$. Pour de tels n et h, nous avons $1 \leq |nh| < 2$, et donc

$$|e^{inh} - 1|^2 \geq C, \tag{12.55}$$

où

$$C := \min\{|e^{it} - 1|^2 \,;\, 1 \le |t| \le 2\} > 0$$

(justifier le fait que $C > 0$).

De (12.54), (12.55), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left(\sum_{2^\ell \le |n| < 2^{\ell+1}} |c_n(f)|\right)^2 \le & \sum_{2^\ell \le |n| < 2^{\ell+1}} |e^{in/2^\ell} - 1|^2 |c_n(f)|^2 \\ & \times \sum_{2^\ell \le |n| < 2^{\ell+1}} \frac{1}{|e^{in/2^\ell} - 1|^2} \le \frac{2^{\ell+1}}{C^2} \omega^2(1/2^\ell), \ \forall\, \ell \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{12.56}$$

Étape 3. Comparaison série-intégrale. La monotonie de ω (exercice 12.27) et la sommation par paquets (proposition 6.40) donnent

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta^{3/2}}\, d\delta = & \sum_{\ell \ge 0} \int_{1/2^{\ell+1}}^{1/2^\ell} \frac{\omega(\delta)}{\delta^{3/2}}\, d\delta \ge \sum_{\ell \ge 0} \int_{1/2^{\ell+1}}^{1/2^\ell} \frac{\omega(1/2^{\ell+1})}{\delta^{3/2}}\, d\delta \\ & \ge \sum_{\ell \ge 0} \int_{1/2^{\ell+1}}^{1/2^\ell} \frac{\omega(1/2^{\ell+1})}{(1/2^\ell)^{3/2}}\, d\delta = 2^{-3/2} \sum_{\ell \ge 1} 2^{\ell/2} \omega(1/2^\ell).\end{aligned} \tag{12.57}$$

Étape 4. Convergence normale de la série de Fourier. En utilisant la sommation par paquets, (12.56), (12.57), et l'hypothèse (12.40), nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| = & |c_0(f)| + \sum_{\ell \ge 0} \sum_{2^\ell \le |n| < 2^{\ell+1}} |c_n(f)| \le |c_0(f)| + \frac{2^{1/2}}{C} \sum_{\ell \ge 0} 2^{\ell/2} \omega(1/2^\ell) \\ & \le |c_0(f)| + \frac{2^{1/2}}{C} \omega(1) + \frac{4}{C} \int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta^{3/2}}\, d\delta < \infty.\end{aligned}$$

Étape 5. Identification de la limite. Notons $S(f) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{in\cdot}$, qui est continue, comme somme d'une série normalement convergente de fonctions continues. Du corollaire 12.7, il existe une suite $n_j \nearrow \infty$ telle que

$$\lim_{j \to \infty} \sum_{k=-n_j}^{n_j} c_k(f)\, e^{ikx} = f(x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}. \tag{12.58}$$

Nous avons donc $S(f) = f$ presque partout d'où, par continuité de $S(f)$ et f, $S(f) = f$ *partout* (justifier). CQFD

12.5 Pour aller plus loin

Les résultats des sections précédentes, notamment la comparaison entre le théorème de Fejér 12.15 et le théorème de Dirichlet 12.13, montrent que la « bonne »

notion de convergence des séries de Fourier est la convergence en moyenne : *il est plus approprié d'approcher f par $T_n(f)$ plutôt que par $S_n(f)$*. Ce phénomène est également illustré par le *phénomène de Gibbs*, instabilité numérique associée à $S_n(f)$ (mais pas à $T_n(f)$) étudiée en analyse numérique. (Voir, dans Hewitt et Hewitt [13], la présentation historique des phénomènes de ce type.)

Néanmoins, l'étude du comportement de la suite $(S_n(f))_n$ a été l'un des moteurs importants du développement de l'analyse entre 1850 et 1970. Signalons, sans preuve, quelques résultats marquants. Commençons par des résultats positifs.

12.35 Théorème (Critère de Jordan)**.** Si $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ est monotone (et étendue par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$), alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, nous avons $S_n(f)(x_0) \to \dfrac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$ quand $n \to \infty$, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$. ◇

12.36 Théorème (Théorème de M. Riesz)**.** Soient $1 < p < \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(]0, 2\pi[)$. Nous avons $S_n(f) \to f$ dans $\mathscr{L}^p$ quand $n \to \infty$. ◇

12.37 Théorème (Théorème de Lebesgue)**.** Si $f \in \mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(]0, 2\pi[)$, alors $T_n(f) \to f$ p. p. sur $[0, 2\pi]$ quand $n \to \infty$. ◇

Voici deux célèbres résultats négatifs.

12.38 Théorème (Théorème de du Bois-Reymond)**.** Il existe une fonction continue et 2π-périodique f telle que $S_n(f)(0) \not\to f(0)$ quand $n \to \infty$.[†] ◇

12.39 Théorème (Théorème de Kolmogorov)**.** Il existe une fonction $f \in \mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(]0, 2\pi[)$ telle que la suite $(S_n(f)(x_0))$ diverge, $\forall\, x_0 \in [0, 2\pi]$. ◇

Au vu du théorème 12.39, il est étonnant de savoir que, dans de nombreux calculs concrets, on peut remplacer $f \in \mathscr{L}^1$ par $\lim_{n\to\infty} S_n(f)$. Des exemples édifiants seront donnés dans l'exercice # 58 de la feuille d'exercices de synthèse et avancés.

Enfin, une amélioration remarquable du corollaire 12.7.

12.40 Théorème (Théorème de Carleson-Hunt)**.** Soient $1 < p < \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(]0, 2\pi[)$. Nous avons $S_n(f) \to f$ p. p. sur $[0, 2\pi]$ quand $n \to \infty$.[‡]

Pour une description historique de ces problèmes, une bonne référence est Edwards [6, Chapitre 10], qui contient aussi des (ébauches de) démonstrations de

[†] Cette propriété négative est vraie pour « la plupart » des fonctions continues, mais donner un sens précis à « la plupart » nécessite un formalisme qui ne sera pas développé ici.

[‡] Le cas $p = 2$ est dû à Carleson, qui conjectura que le cas général $1 < p < \infty$ devait se faire de manière analogue. Une preuve pour $1 < p < \infty$ fut trouvée ultérieurement par Hunt.

ces résultats, sauf du dernier. La preuve du dernier théorème est longue et difficile, même si elle a été beaucoup simplifiée entre 1973 et 2000 ; voir Grafakos [9, Chapitre 11]. Une version moins puissante, mais plus facile à montrer du théorème de Carleson est le résultat suivant, dû à Kolmogorov (voir Natanson [18, Section X.3, Theorem 4]).

12.41 Théorème (Théorème de Kolmogorov)**.** Si $f \in \mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(]0, 2\pi[)$, nous avons $S_{2^n}(f) \to f$ p. p. sur $[0, 2\pi]$. Même conclusion si la suite (2^n) est remplacée par une suite (x_n) *lacunaire* d'entiers, c'est-à-dire telle que $\liminf \dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$. $\diamond$

Chapitre 14

Introduction aux espaces de Hilbert

14.0 Aperçu

Dans ce mini-chapitre, marginal par rapport au sujet principal du cours, nous présentons quelques propriétés basiques des *espaces de Hilbert*, c'est-à-dire des espaces de Banach H dont la norme $\| \ \|$ est induite par un produit scalaire $< \ , >$. Pour simplifier la lecture, nous considérons systématiquement *un espace de Hilbert réel* ; le passage aux espaces complexes n'apporte pas de difficulté supplémentaire.

En dimension finie, les objets fondamentaux qui permettent de mener des calculs explicites (projection orthogonale sur un sous-espace, calcul de l'adjoint, diagonalisation des opérateurs auto-adjoints, ...) sont les *bases orthonormées*. Le passage aux espaces de dimension (algébrique) infinie pose de nombreux problèmes : par exemple, un opérateur auto-adjoint n'est plus nécessairement diagonalisable. Nous établissons ici trois résultats fondamentaux qui ne nous dépaysent pas trop et sont des pendants « infinis » de résultats rencontrés en dimension finie :

1. L'existence de la *projection orthogonale* sur un sous-espace vectoriel fermé de H (ou, plus généralement, sur une partie convexe fermée non-vide de H) ;
2. L'existence d'une *base hilbertienne* (l'analogue d'une base orthonormée en dimension infinie) dans les espaces séparables ;
3. La caractérisation des formes linéaires et continues sur H (*théorème de Riesz* 14.19).

Compétences minimales attendues.

a) Savoir utiliser l'inégalité de Bessel et l'égalité de Parseval.
b) Savoir étudier et manipuler des séries orthogonales.
c) Savoir utiliser les propriétés de l'orthogonal.
d) Savoir utiliser le théorème de Riesz 14.19. ◇

14.1 Projection sur un convexe fermé

.

14.1 Proposition. Soit C une partie convexe, fermée et non-vide de H. Pour tout $x \in H$, il existe un et un seul $y \in C$ tel que

$$\|x - y\| \leq \|x - z\|, \ \forall\, z \in C. \tag{14.1}$$

14.2 Définition. Le point y ci-dessus est la *projection orthogonale* de x sur C, et on note $y = p_C(x)$.

La résultat suivant donne une caractérisation utile de la projection orthogonale.

14.3 Proposition. Avec x, C comme ci-dessus, nous avons

$$y = p_C(x) \iff [y \in C \text{ et } < x - y, z - y > \leq 0, \ \forall\, z \in C]. \tag{14.2}$$

Dans le cas particulier d'un sous-espace vectoriel fermé F de H, nous avons

$$y = p_F(x) \iff [y \in F \text{ et } < x - y, w > = 0, \ \forall\, w \in F]. \tag{14.3}$$

14.4 Définition. Soit F une partie non-vide de H. L'*orthogonal de* F est

$$F^{\perp} := \{y \in H \, ; < x, y > = 0, \ \forall\, x \in F\}. \tag{14.4}$$

On vérifie aisément que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H (exercice 14.9 a)).

14.5 Théorème. Soit F un sous-espace fermé de H. Alors $F \oplus F^{\perp} = H$.

14.6 Corollaire. a) Si F est un sous-espace fermé de H, $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

b) Si A est une partie non-vide de H, $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\text{Vect}\,(A)}$. ◇

14.7 Corollaire. Soit F un sous-espace fermé non-nul de H. Alors p_F est un projecteur linéaire continu de norme 1. ◇

Exercices

Cet exercice prépare la preuve de la proposition 14.3.

14.8 Exercice. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. 0 est un point de minimum de f.
2. $f'(0) \geq 0$. ◇

Cet exercice prépare la preuve du corollaire 14.6.

14.9 Exercice. Soit F une partie non-vide de H. Montrer que :

a) $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.

b) $\overline{\text{Vect}\,(F)}^\perp = F^\perp$. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 14.1. Étape 1. Existence de la projection. Soit

$$d := d(x,C) = \inf\{\|x - z\|\,;\, z \in C\}.$$

Soit $(z_j) \subset C$ telle que $\|x - z_j\| \to d$. L'identité du parallélogramme donne (vérifier)

$$\|(z_j - z_k)/2\|^2 = \frac{1}{2}\|x - z_j\|^2 + \frac{1}{2}\|x - z_k\|^2 - \|x - (z_j + z_k)/2\|^2,\ \forall\, j,k. \tag{14.5}$$

C étant convexe, nous avons $(z_j + z_k)/2 \in C$, $\forall\, j,k$, d'où, en utilisant (14.5) et la définition de d,

$$\|(z_j - z_k)/2\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x - z_j\|^2 + \frac{1}{2}\|x - z_k\|^2 - d \to 0 \text{ quand } j,k \to \infty. \tag{14.6}$$

De (14.6), nous avons $\lim_{j,k\to\infty}(z_j - z_k) = 0$, et donc (z_j) est une suite de Cauchy de C. H étant complet et C fermé, (z_j) converge vers un $y \in C$. Par ailleurs,

$$\|x - y\| = \lim_j \|x - z_j\| = d \leq \|x - z\|,\ \forall\, z \in C,$$

et donc y a la propriété de l'énoncé.

Étape 2. Unicité de la projection. En admettant provisoirement la proposition 14.3, si y_1, y_2 sont comme dans l'énoncé, nous avons

$$< x - y_1, y_2 - y_1 > \leq 0,$$
$$< x - y_2, y_1 - y_2 > \leq 0.$$

En additionnant les deux inégalités, nous obtenons $\|y_2 - y_1\|^2 \leq 0$, d'où $y_1 = y_2$.

Étape 2. Unicité de la projection : preuve alternative. Dans l'étape 1, nous avons montré que, si $(z_j) \subset C$ est une suite telle que $\|x - z_j\| \to d$, alors (z_j) converge. Soient y_1, y_2 comme dans l'énoncé. La suite $y_1, y_2, y_1, y_2, \ldots$ est alors convergente (pourquoi ?), d'où $y_1 = y_2$ (pourquoi ?). CQFD

Démonstration de la proposition 14.3. « $\Rightarrow$ » Soit $z \in C$. Pour $t \in [0,1]$, nous avons $(1-t)y+tz \in C$ (par convexité de C) et donc (par définition de la projection)

$$f(t) := \|x-(1-t)y-tz\|^2 \geq \|x-y\|^2 = f(0),\ \forall\, t \in [0,1]. \tag{14.7}$$

f étant convexe et dérivable (justifier), (14.7) équivaut à $f'(0) \geq 0$ (voir l'exercice 14.8). Or, $f'(0) = 2 < x-y, y-z >$, d'où la conclusion.

« $\Leftarrow$ » Avec les notations ci-dessus, nous avons $f'(0) \geq 0$, et donc (en utilisant à nouveau l'exercice 14.8) $f(1) \geq f(0)$, ce qui revient à $\|x-z\| \geq \|x-y\|$, $\forall\, z \in C$.

Le cas particulier d'un sous-espace. « $\Rightarrow$ » Soit $w \in F$. En prenant, dans (14.2), $z := y+w \in F$, respectivement $z := y-w \in F$, nous obtenons $< x-y, w > \leq 0$, respectivement $< x-y, -w > \leq 0$, d'où $< x-y, w >= 0$.

« $\Leftarrow$ » Soit $z \in F$. Alors $< x-y, z-y >= 0$, car $z-y \in F$. CQFD

Démonstration du théorème 14.5. $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de H (exercice 14.9 a)). Par ailleurs, si $x \in F \cap F^\perp$, alors $< x, x >= 0$, et donc $x = 0$. Enfin, soient $x \in H$ et $y := p_F(x)$. La proposition 14.3 donne $x-y \in F^\perp$, et donc $x = y+(x-y) \in F+F^\perp$. CQFD

Démonstration du corollaire 14.6. a) $F^\perp$ est un sous-espace fermé de H (exercice 14.9 a)), d'où, en appliquant deux fois le théorème 14.5, $F \oplus F^\perp = H$ et $F^\perp \oplus \left(F^\perp\right)^\perp = H$. Par ailleurs, nous avons clairement $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$, d'où l'égalité $F = \left(F^\perp\right)^\perp$.[†]

b) L'exercice 14.9 b) donne $A^\perp = \overline{\text{Vect}\,(A)}^\perp$. Comme l'adhérence d'un sous-espace est encore un sous-espace (justifier), la partie a) du corollaire donne

$$\left(A^\perp\right)^\perp = \left(\overline{\text{Vect}\,(A)}^\perp\right)^\perp = \overline{\text{Vect}\,(A)}. \qquad \text{CQFD}$$

Démonstration du corollaire 14.7. Soient $x_1, x_2 \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $x := x_1 + \lambda x_2$ et $y := p_F(x_1) + \lambda p_F(x_2)$, alors x et y satisfont (14.3), et donc $y = p_F(x)$. Il s'ensuit que p_F est linéaire.[‡]

Pour tout ensemble convexe, fermé et non-vide C, nous avons $p_C(x) = x$, $\forall\, x \in C$, d'où $p_C \circ p_C = p_C$. Dans le cas particulier d'un sous-espace fermé F, nous obtenons que p_F est un projecteur (linéaire).

La décomposition orthogonale $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et le théorème de Pythagore donnent

$$\|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x-p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2,$$

et donc p_F est continu, de norme ≤ 1.

F étant non-nul, il existe $x \in F\backslash\{0\}$. Pour cet x, nous avons

$$\|p_F(x)\| = \|x\| \leq \|p_F\|\|x\|,$$

d'où $\|p_F\| \geq 1$, et finalement $\|p_F\| = 1$. CQFD

[†]Nous utilisons ici le fait suivant, de nature purement algébrique : si E, F, G, H sont des espaces vectoriels tels que $E = F \oplus G = F \oplus H$, et si $H \subset G$, alors $H = G$.

[‡]C'est une n$^{\text{e}}$ occurrence du principe que l'unicité implique la linéarité (ou autres propriétés algébriques, selon le contexte).

14.2 Bases hilbertiennes

Dans un espace de Hilbert de dimension algébrique infinie, la notion « naturelle » de base orthonormée serait la suivante :

a) $(e_j)_{j\in J}$ (avec J famille infinie) est une base algébrique de H, c'est-à-dire tout $x \in H$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j$, avec un nombre fini de scalaires λ_j non-nuls (pour donner un sens à la somme).

b) La famille $(e_j)_{j\in J}$ est orthonormée, c'est-à-dire, pour $j, k \in J$, $< e_j, e_k >= 0$ si $j \neq k$, respectivement $< e_j, e_j >= 1$.

Il se trouve qu'*aucun* espace de Hilbert de dimension infinie ne possède une base orthonormée au sens de la définition naïve ci-dessus (voir l'exercice 14.17). La bonne définition d'une base garde l'exigence b), mais remplace, dans la représentation a), la somme finie par une somme infinie. Afin de simplifier la compréhension, nous considérons le cas « le moins infini possible », celui des espaces séparables, mais il faut garder à l'esprit que cette restriction n'est pas fondamentale pour l'existence d'une base hilbertienne (en général, non-dénombrable).

14.10 Théorème. On suppose H *séparable* et de *dimension infinie*. Alors il existe une famille orthonormée $(e_n)_{n\geq 1} \subset H$ telle que

$$x = \sum_{n\geq 1} < x, e_n > e_n, \ \forall\, x \in H. \tag{14.8}$$

Ce résultat reste valable en supposant uniquement H pré-hilbertien, séparable et de dimension infinie.

14.11 Définition. Une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ comme dans le théorème 14.2 est une *base hilbertienne* de H.

14.12 Corollaire. Si $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne de H, nous avons

$$\|x\|^2 = \sum_{n\geq 1} < x, e_n >^2, \ \forall\, x \in H \text{ (égalité de Parseval)}. \tag{14.9}$$

En lien avec le corollaire 14.12, voir les exercices 14.14 et 14.15.

Le résultat suivant donne une définition alternative d'une base hilbertienne.

14.13 Proposition. Une suite $(e_n)_{n\geq 1} \subset H$ est une base hilbertienne de H si et seulement si :

(i) La suite est orthonormée.

(ii) L'espace vectoriel engendré par la suite est dense dans H.

De manière équivalente, $(e_n)_{n\geq 1} \subset H$ est une base hilbertienne de H si et seulement si nous avons (i) et

(ii') Si $< x, e_n >= 0$, $\forall\, n$, alors $x = 0$. ◇

Exercices

14.14 Exercice. Soit $(e_j)_{j\geq 1} \subset H$ une famille orthonormée. Soit $(a_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$\sum_{j\geq 1} a_j e_j \text{ converge } \iff \sum_{j\geq 1} a_j^2 < \infty.$$

En cas de convergence de la série, montrer que $\left\|\sum_{j\geq 1} a_j e_j\right\|^2 = \sum_{j\geq 1} a_j^2$. ◇

14.15 Exercice. (Voir la section 12.1) Soit $(e_j)_{1\leq j<N} \subset H$ (avec $N = 2, 3, \ldots, \infty$) une suite orthonormée d'une espace pré-hilbertien H. Montrer que

$$\sum_{1\leq j<N} < x, e_j >^2 \leq \|x\|^2,\ \forall\, x \in H \text{ (inégalité de Bessel)}$$

et que, si N est fini, cette inégalité devient

$$\left\| \sum_{1\leq j<N} < x, e_j > e_j \right\|^2 \leq \|x\|^2,\ \forall\, x \in H. \qquad \diamond$$

14.16 Exercice. Avec les notations du chapitre 12, montrer que $(x \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0, 2\pi[)$. ◇

14.17 Exercice. Soit H un espace préhilbertien ayant une base algébrique orthonormée infinie $\mathscr{B}$. Montrer que H n'est pas complet.
Indication : soit $(e_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{B}$ une suite orthonormée. Soit $x_n := \sum_{j=1}^{n} (1/j^2) e_j$, $\forall\, n \geq 1$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, mais ne converge pas. ◇

Cet exercice éclaire l'énoncé de la proposition 14.13.

14.18 Exercice. Soit F un sous-espace vectoriel de H. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. F est dense dans H.
2. $F^{\perp} = \{0\}$. ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 14.10. Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$ une partie dénombrable et dense de H. Soit $E_k := \text{Vect}\,(\{a_1, \ldots, a_k\})$, $\forall\, k \geq 1$. Nous avons $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ et $\dim E_{k+1} - \dim E_k \leq 1$, $\forall\, k \geq 1$.

Étape 1. La suite $(E_k)_{k\geq 1}$ n'est pas stationnaire. En effet, sinon il existe k tel que $E_\ell = E_k$, $\forall\, \ell \geq k$, et dans ce cas tous les points de A appartiennent à E_k. Il ensuit que (justifier) $H = \overline{A} \subset \overline{E_k} = E_k$, impossible, car H est de dimension infinie.

Étape 2. Construction par récurrence des vecteurs e_n, $n \geq 1$. Si E_k est le premier espace non-nul, alors $\dim E_k = 1$ et nous choisissons un vecteur normé $e_1 \in E_k$. En supposant construits $e_1, \ldots, e_n$ qui forment une base orthonormée de E_ℓ, nous considérons le premier $j > \ell$ tel que $E_j \neq E_\ell$ (un tel j existe, *cf* la première étape). Nous avons $\dim E_j - \dim E_\ell = 1$. Nous pouvons donc compléter $\{e_1, \ldots, e_n\}$ à une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ de E_j. Notons que, grâce à l'étape 1 et par construction, $(e_n)_{n\geq 1}$ est une suite (infinie) orthonormée.

Étape 3. Preuve de (14.8). Soient $x \in H$ et $\varepsilon > 0$. Soit $a_k \in A$ tel que

$$\|x - a_k\| < \varepsilon/2. \tag{14.10}$$

Si $n \geq k$, nous avons $a_k \in \text{Vect}\,(\{e_1, \ldots, e_n\})$ (justifier), et donc

$$a_k = \sum_{1\leq j\leq n} < a_k, e_j > e_j,\ \forall\, n \geq k. \tag{14.11}$$

En combinant (14.11) avec l'inégalité de Bessel (exercice 14.15) et (14.10), nous obtenons, pour tout $n \geq k$,

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j > e_j - x \right\| \leq & \left\| \sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j > e_j - a_k \right\| + \|x - a_k\| \\ = & \left\| \sum_{1\leq j\leq n} < x - a_k, e_j > e_j \right\| + \|x - a_k\| \\ < & \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,\end{aligned}$$

d'où (14.8). CQFD

Preuve du corollaire 14.12. La continuité de la norme, (14.8) et le théorème de Pythagore donnent

$$\|x\|^2 = \lim_n \left\| \sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j > e_j \right\|^2 = \lim_n \sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j >^2 = \sum_{n\geq 1} < x, e_n >^2 . \qquad \text{CQFD}$$

Preuve de la proposition 14.13. Soit $(e_n)_{n\geq 1} \subset H$ une suite orthonormée. Soit

$$G := \text{Vect}\,(\{e_n\,;\, n \geq 1\}).$$

« (14.8)⇒(ii) » Si $x \in H$, alors $y_n := \sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j > e_j \in G$, $\forall\, n \geq 1$, et $y_n \to x$, d'où $x \in \overline{G}$, ce qui implique $\overline{G} = H$.

« (ii)⇒(ii') » L'exercice 14.9 b), (ii) et le théorème 14.5 donnent

$$\begin{aligned}[< x, e_n >= 0,\ \forall\, n \geq 1] \iff & x \in \{e_n\,;\, n \geq 1\}^\perp \iff x \in \overline{G}^\perp \iff x \in H^\perp = \{0\} \\ \iff & x = 0.\end{aligned}$$

« (ii')⇒(14.8) » L'inégalité de Bessel (exercice 14.15) et l'exercice 14.14 impliquent l'existence de

$$y := \sum_{n\geq 1} < x, e_n > e_n = \lim_k \underbrace{\sum_{1\leq j\leq k} < x, e_j > e_j}_{:=y_k}. \tag{14.12}$$

Si $k \geq n$, nous avons $< y_k, e_n >=< x, e_n >$, d'où

$$< x - y, e_n >= \lim_k < x - y_k, e_n >= \lim_k 0 = 0, \ \forall\, n \geq 1. \tag{14.13}$$

De (14.13) et (ii'), nous trouvons que $x = y$. Nous concluons grâce à (14.12). CQFD

14.3 Théorème de représentation de Riesz

14.19 Théorème. (Théorème de Riesz) Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue. Alors il existe $a \in H$ tel que

$$\varphi(x) =< x, a >, \ \forall\, x \in H. \tag{14.14}$$

Et réciproquement.

De plus, nous avons

$$\|\varphi\| = \|a\|. \tag{14.15}$$

Exercices

14.20 Exercice. Montrer que

$$\|x\| = \max\{< x, y > ; \ y \in H, \|y\| \leq 1\}, \ \forall\, x \in H. \qquad \diamond$$

Démonstrations

Démonstration du théorème 14.19. Étape 1. Existence de a et preuve de (14.15). Si $\varphi = 0$, $a = 0$ convient. Si $\varphi \neq 0$, soit $F := \operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$, qui est un sous-espace fermé de H (justifier). Soit $b \in H$ tel que $\varphi(b) = 1$ (justifier l'existence d'un tel b). Soient $c := p_F(b)$ et $d := b - c \neq 0$. Notons que $\varphi(d) = \varphi(b) = 1$ et $\varphi(x - \varphi(x)d) = 0$, $\forall\, x \in H$ (et donc $x - \varphi(x)d \in F$, $\forall\, x \in H$). Si $x \in H$, nous avons (grâce à (14.3))

$$< x, d >=< \underbrace{x - \varphi(x)d}_{\in F}, \ \underbrace{d}_{=b-p_F(b)} > + < \varphi(x)d, d >= \varphi(x)\|d\|^2,$$

et donc $a := d/\|d\|^2$ convient.

L'égalité (14.15) suit de l'exercice 14.20.

Étape 2. Assertion réciproque. Clairement, $H \ni x \mapsto < x, a >$ est linéaire et, de l'exercice 14.20, continue de norme $\|a\|$. CQFD

14.4 Pour aller plus loin

L'étude des espaces de Hilbert sera poursuivie dans l'UE d'Analyse fonctionnelle en master 1. Une excellente référence est Brezis [5].

Les bases hilbertiennes jouent un rôle important dans l'analyse des espaces de Hilbert et au-delà (analyse numérique, étude des espaces L^p et d'autres espaces de fonctions). Parmi les plus célèbres, notons celle de Haar, Hermite, Laguerre, Legendre et Walsh, dont la construction sera étudiée en master.

Pour conclure ce chapitre, nous ouvrons ici une perspective non-hilbertienne, dans le prolongement du théorème de représentation de Riesz 14.19. La preuve de ce théorème repose sur deux ingrédients :

a) On peut projeter sur un ensemble convexe, fermé et non-vide de H.
b) Pour tous $u \in H\backslash\{0\}$ et $v \in H$, l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \|u + tv\|$ est dérivable en $t = 0$.

Le résultat suivant (voir Willem [23, Chapitre IV, Section 14] pour un énoncé voisin) permet d'obtenir une conclusion similaire à celle du théorème de représentation de Riesz *dans le cadre des espaces de Banach*.

14.21 Théorème. (Théorème de représentation de James) Soit $H \neq \{0\}$ un espace *de Banach* avec les propriétés a) et b) ci-dessus. Si $\varphi : H \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire et continue, alors il existe $u \in H$ tel que $\|u\| = 1$ et

$$\varphi(x) = \|\varphi\| \left[\frac{d}{dt}\|u + tx\|\right]_{t=0}, \ \forall\, x \in H. \qquad \diamond \quad (14.16)$$

De manière remarquable, ce théorème s'applique aux espaces L^p avec $1 < p < \infty$. Pour ces espaces, la formule (14.16) donne le théorème de représentation de Riesz 10.32 a). (Voir la section suivante.)

14.5 Pour aller encore plus loin

Cette section sera utile plutôt au moment d'aborder en master l'analyse fonctionnelle. Elle fait suite à la fin de la section précédente et permet de voir la partie difficile du théorème de Riesz 14.19 (l'existence de a) et la partie difficile du théorème de représentation de Riesz 10.32 (l'existence de g) comme des cas particuliers d'un résultat plus général.

14.22 Théorème. (Forme « utile » du théorème de représentation de James) Soit $E \neq \{0\}$ un espace de Banach.

On suppose que :

$$\text{Pour tout hyperplan affine fermé } F \subset E, \text{ il existe } u \in F \text{ tel que } \|u\| \leq \|v\|, \forall\, v \in F, \tag{14.17}$$

$$\text{Pour tous } u \in E\backslash\{0\} \text{ et } v \in E, \text{ l'application } \mathbb{R} \ni t \mapsto \|u + tv\| \text{ est dérivable en } t = 0. \tag{14.18}$$

Si $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire et continue, alors il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et

$$\varphi(x) = \|\varphi\| \left[\frac{d}{dt}\|u + tx\|\right]_{t=0}, \ \forall\, x \in E. \qquad \diamond \tag{14.19}$$

14.23 Remarque. La propriété (14.17) ci-dessus équivaut à $\|0 - u\| = \operatorname{dist}(0, F)$, et donc la condition a) revient à exiger que 0 ait une projection sur F, qui est un convexe fermé. Ainsi, l'hypothèse (14.17) qui apparaît dans le théorème 14.22 est *a priori* plus faible que la condition a) du théorème 14.21. $\diamond$

Preuve du théorème 14.22. Si $\varphi = 0$, tout u convient. Supposons $\varphi \neq 0$.

Étape 1. Choix de F et utilisation de (14.17) *pour trouver u.* Soit

$$F := \varphi^{-1}(\|\varphi\|) = \{v \in E\,;\, \varphi(v) = \|\varphi\|\},$$

qui est un hyperplan affine de E (car φ est une forme linéaire non-nulle) fermé (car φ est continue).

Par définition de la norme $\|\varphi\|$, nous avons $\varphi(x) \leq \|\varphi\|\|x\|$, $\forall\, x \in E$, et donc $\|v\| \geq 1$, $\forall\, v \in F$.

Également par définition de la norme, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\varphi(x) > \dfrac{\|\varphi\|}{1+\varepsilon}$, et donc, si on pose $v := \dfrac{\|\varphi\|}{\varphi(x)}x$, alors $v \in F$ et $\|v\| < 1 + \varepsilon$.

De ce qui précède, nous avons $\inf_{v\in F} \|v\| = 1$. La propriété a) assure l'existence de $u \in F$ tel que $\|u\| = 1$.

Étape 2. Utilisation de (14.18) *pour montrer* (14.19). Soit $x \in E$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $g(t) \geq 0$, où

$$g(t) := \|\varphi\|\|u + tx\| - \varphi(u + tx). \tag{14.20}$$

De plus, nous avons $g(0) = 0$, et donc $t = 0$ est un point de minimum de g. L'hypothèse (14.18) nous assure que g est dérivable en 0. Il s'ensuit, de ce qui précède, que $g'(t) = 0$, ce qui revient à (14.19). CQFD

Pour utiliser le théorème 14.22, il faut pouvoir vérifier les hypothèses (14.17) et (14.18). Les trois résultats qui suivent ont trait à l'hypothèse (14.17).

14.24 Proposition. Dans un espace de Banach E, la propriété suivante :

$$\begin{gathered}\text{Si } (u_j) \subset E \text{ satisfait } \|u_j\| \to 1, \text{ et } \|u_j + u_k\| \geq 2, \forall\, j,k, \\ \text{alors } (u_j) \text{ est une suite de Cauchy,}\end{gathered} \tag{14.21}$$

implique (14.17). ◇

La preuve de la proposition 14.1 utilise implicitement la propriété (14.21). Dans ce cas particulier, la validité de (14.21) découle de l'identité du parallélogramme. En examinant l'utilisation de cette identité dans le preuve de la proposition 14.1, on constate qu'une « inégalité du parallélogramme », même avec une marge d'erreur (quantifiée ci-dessous par ε) aurait suffit.

14.25 Proposition. (Inégalités du parallélogramme généralisées) Dans un espace de Banach E, la propriété suivante :

$$\begin{gathered}\text{Il existe } 1 \leq p < \infty \text{ tel que : pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } C(\varepsilon) < \infty \text{ tel que} \\ \|u-v\|^p \leq \varepsilon^p \|v\|^p + C(\varepsilon)\left(\|u\|^p + \|v\|^p - 2\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^p\right),\ \forall\, u,v \in E,\end{gathered} \tag{14.22}$$

implique (14.21) (et donc (14.17)). ◇

14.26 Proposition. a) Dans un espace préhilbertien E, (14.22) est vérifiée avec $p = 2$ et $C(\varepsilon) = 2$. En particulier, tout espace de Hilbert vérifie (14.21) et donc (14.17).

b) Si $1 < p < \infty$, alors L^p vérifie (14.22). En particulier, tout espace L^p avec $1 < p < \infty$ vérifie (14.21) et donc (14.17). ◇

Démonstration de la proposition 14.24. Si $0 \in F$, nous prenons $u = 0$, et (14.21) ne sert pas. Si $0 \notin F$, alors $\operatorname{dist}(0,F) > 0$. En remplaçant F par $(1/\operatorname{dist}(0,F))F$, nous pouvons supposer que $\operatorname{dist}(0,F) = 1$ (détailler). Soit $(u_j) \subset F$ telle que $\|u_j\| \to 1$. Pour tous j,k, nous avons $(u_j + u_k)/2 \in F$, et donc $\|u_j + u_k\| \geq 2$ (détailler). De (14.21), la suite (u_j) est de Cauchy. E étant complet et F fermé, il existe $u \in F$ tel que $u_j \to u$. Il s'ensuit que $u \in F$ et $\|u\| = 1 = \inf_{v\in F} \|v\|$. CQFD

Démonstration de la proposition 14.25. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ à fixer ultérieurement. Soit j_0 tel que $\|u_j\|^p \leq 1 + \delta$, $\forall\, j \geq j_0$. Nous avons (de (14.22))

$$\|u_j - u_k\| \leq [\varepsilon^p(1+\delta) + 2C(\varepsilon)\delta]^{1/p},\ \forall\, j,k \geq j_0. \tag{14.23}$$

Le nombre ε étant fixé, en choisissant δ de sorte que le membre de droite de (14.23) soit $< 2\varepsilon$, nous obtenons que la suite (u_j) est bien de Cauchy. CQFD

Dans la preuve de la proposition 14.26 b), nous utiliserons le résultat suivant.

14.27 Lemme. Soient $1 < p < \infty$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $C(\varepsilon) = C(\varepsilon, p) < \infty$ telle que, pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|a-b| \geq \varepsilon |b| \implies |a-b|^p \leq C(\varepsilon) \left(|a|^p + |b|^p - 2 \left| \frac{a+b}{2} \right|^p \right). \qquad \diamond \quad (14.24)$$

Démonstration. Soit

$$F(t) \coloneqq \frac{|t-1|^p}{|t|^p + 1 - 2|(t+1)/2|^p}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

La fonction $x \mapsto |x|^p$ étant strictement convexe (car $p > 1$), l'inégalité stricte de Jensen montre que le dénominateur de $F(t)$ est > 0 (justifier !), et donc F est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Par ailleurs, nous avons

$$\lim_{|t|\to\infty} F(t) = \frac{1}{1-2^{1-p}} > 0.$$

Il s'ensuit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\dfrac{1}{1-2^{1-p}} \leq C(\varepsilon) < \infty$ tel que

$$F(t) \leq C(\varepsilon), \ \forall\, t \text{ tel que } |t-1| \geq \varepsilon. \qquad (14.25)$$

Par homogénéité, (14.25) implique (14.24) (justifier, en étudiant le cas $b = 0$ et, si $b \neq 0$, en prenant $t \coloneqq a/b$). CQFD

Démonstration de la proposition 14.26. a) suit de l'identité du parallélogramme

$$\|u-v\|^2 = 2 \left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 \right).$$

b) Si $f, g \in \mathscr{L}^p$, alors (en utilisant (14.24))

$$\begin{aligned} \int |f-g|^p &= \int_{|f-g|<\varepsilon|g|} |f-g|^p + \int_{|f-g|\geq\varepsilon|g|} |f-g|^p \\ &\leq \varepsilon^p \int_{|f-g|<\varepsilon|g|} |g|^p + C(\varepsilon) \int_{|f-g|\geq\varepsilon|g|} \left(|f|^p + |g|^p - 2 \left| \frac{f-g}{2} \right|^p \right) \\ &\leq \varepsilon^p \int |g|^p + C(\varepsilon) \int \left(|f|^p + |g|^p - 2 \left| \frac{f-g}{2} \right|^p \right), \end{aligned}$$

car les intégrandes de la deuxième et troisième lignes sont positives (pour la deuxième intégrande, justifier en utilisant la preuve du lemme 14.27). CQFD

Enfin, nous nous intéressons à la propriété (14.18).

14.28 Proposition. a) Si H est un espace préhilbertien réel et $u \in H\backslash\{0\}$, alors

$$\left[\frac{d}{dt}\|u+tx\|\right]_{t=0} = \frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|},\ \forall\, x \in H. \tag{14.26}$$

b) Si $1 < p < \infty$ et $u \in L^p\backslash\{0\}$, alors

$$\left[\frac{d}{dt}\|u+tf\|_p\right]_{t=0} = \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}}\int |u|^{p-1}(\operatorname{sgn} u)f,\ \forall\, f \in L^p. \qquad \diamond \tag{14.27}$$

Dans la preuve de la proposition 14.28 b), nous utiliserons le résultat suivant.

14.29 Lemme. Si $1 < p < \infty$, alors, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$||a+b|^p - |a|^p| \le p2^{p-1}(|a|^{p-1} + |b|^{p-1})|b|. \qquad \diamond \tag{14.28}$$

Démonstration. La fonction $x \mapsto |x|^p$ est dérivable, de dérivée $p|x|^{p-1}\operatorname{sgn} x$. Le théorème des accroissements finis donne l'existence d'un c compris entre a et $a+b$ tel que

$$|a+b|^p - |a|^p = p|c|^{p-1}(\operatorname{sgn} c)b.$$

On obtient

$$\begin{aligned}||a+b|^p - |a|^p| =& p|c|^{p-1}|b| \le p(|a|+|b|)^{p-1}|b| \\ \le& p[2\max\{|a|,|b|\}]^{p-1}|b| \le 2^{p-1}(|a|^{p-1}+|b|^{p-1})|b|.\end{aligned}$$ CQFD

Démonstration de la proposition 14.28. a) Il suffit de noter que

$$\|u+tx\| = \sqrt{\|u\|^2 + 2t\langle x,u\rangle + t^2\|x\|^2}$$

et d'utiliser la règle de la chaîne (détailler).

b) Considérons l'intégrale à paramètre

$$\mathbb{R}\backslash\{0\} \ni t \mapsto F(t) := \frac{\|u+tf\|_p^p - \|u\|_p^p}{t} = \int \frac{|u+tf|^p - |u|^p}{t}.$$

Nous avons $\dfrac{|u+tf|^p - |u|^p}{t} \to p|u|^{p-1}(\operatorname{sgn} u)f$ simplement quand $t \to 0$ (justifier). Par ailleurs, d'après le lemme 14.29, la domination

$$\left|\frac{|u+tf|^p - |u|^p}{t}\right| \le p2^{p-1}(|u|^{p-1} + |f|^{p-1})|f| \tag{14.29}$$

est vraie lorsque $|t| \leq 1$ (détailler). L'inégalité de Hölder montre que le membre de droite de (14.29) est dans L^1 (détailler). Par convergence dominée, il s'ensuit que $\lim_{t\to 0} F(t) = p \int |u|^{p-1}(\operatorname{sgn} u) f$, et donc

$$\left[\frac{d}{dt}\|u + tf\|_p^p\right]_{t=0} = p \int |u|^{p-1}(\operatorname{sgn} u) f. \tag{14.30}$$

L'identité (14.27) suit de (14.30) et de la règle de la chaîne (détailler). CQFD

Nous concluons cette section par la preuve des théorèmes 14.19 et 10.32 (partie existence) en utilisant les résultats établis ci-dessus.

Preuve du théorème 14.19 (partie existence). Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ linéaire et continue. Le théorème 14.22, la proposition 14.26 a) et la proposition 14.28 a) impliquent qu'il existe $u \in H$ tel que $\|u\| = 1$ et

$$\varphi(x) = \|\varphi\|\langle x, u\rangle, \ \forall\, x \in H.$$

Il suffit alors de prendre $a := \|\varphi\| u$. CQFD

Preuve du théorème 10.32 (partie existence). Soit $\varphi : L^p \to \mathbb{R}$ linéaire et continue. Le théorème 14.22, la proposition 14.26 b) et la proposition 14.28 b) impliquent qu'il existe $u \in L^p$ tel que $\|u\|_p = 1$ et

$$\varphi(f) = \|\varphi\| \int |u|^{p-1}(\operatorname{sgn} u) f, \ \forall\, f \in L^p.$$

Nous concluons en notant que $g := \|\varphi\||u|^{p-1}(\operatorname{sgn} u) \in L^q$ (détailler). CQFD

14.30 Remarque. Sous l'hypothèse (14.21), on peut définir la projection sur tout convexe fermé non-vide de E (analogue de la proposition 14.1). De plus, il y a une caractérisation de la projection analogue à la proposition 14.3. Pour ces propriétés, voir l'exercice de synthèse et avancé # 66. ◇

Index

$A \Delta B$, 27
A^c, 24
$A_n \nearrow A$, 27
$A_n \searrow A$, 27
$\|(a_n)_n\|_{\ell^p}$, 188
$\mathscr{B}_X$, 37
$C_c^k(\Omega)$, 204
$\mathscr{C}(\mathscr{A})$, 34
C^1-difféomorphisme, 166
$C_{\text{pér}}$, 223
$c_n(f)$, 221
diam A, 87
$E(x)$, 109
E^y, 137
E_x, 137
esssup, 185
$F^\perp$, 256
$\mathscr{F}(f)(\xi)$, 239
$[|f| > t]$, 101
$[f \in A]$, 101
$[f \leq t]$, 101
$< f, g >$, 196
$\|f\|_p$, 185
$\check{f}$, 242
$\widehat{f}(\xi)$, 239
$f(\cdot, \lambda)$, 128
$f(x, \cdot)$, 128
$f * g$, 201
$f\chi_A$, 44
$f \sim g$, 185
$f^{-1}(B)$, 42
$f^{-1}(y)$, 42
f_+, 50
f_-, 50
$\|f\|_{L^p}$, 185
f^y, 146
f_x, 146
inf A, 20
$\mathscr{L}^p(X, \mu)$, 185
$\mathscr{L}^p$, 185
L^p, 185
$L^p(X, \mu)$, 185
ℓ^p, 188
$\liminf_n x_n$, 20
$\limsup_n x_n$, 20
$\mathscr{L}_n$, 67
$\mathscr{M}(\mathscr{A})$, 34
$\omega(\delta)$, 231
$\mathscr{P}(X)$, 24
$p_C(x)$, 256
$\mathscr{Q}_j$, 164
$\overline{\mathbb{R}}$, 20
$S_n(f)$, 222
$\sup\{x_i;\ i \in I\}$, 20
$\sup_{n \geq n_0} x_n$, 22
$\sup_{x \in A} f(x)$, 20
sgn, 192
sup A, 20
$\mathscr{T}(\mathscr{A})$, 34
$\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$, 135
$\overline{\mathscr{T}}$, 57
t_+, 50
t_-, 50
$T_n(f)$, 226
$(x_n)_n \subset A$, 20

$x \cdot \xi$, 239
x^α, 241
$0 \cdot \infty$, 48
α, 241
$|\alpha|$, 241
χ_A, 27
$\overline{\mu}$, 57
δ_a, 28
μ-p. p., 59
$\mu \otimes \nu$, 137
ν_n, 67
ρ_ε, 204
τ, 37
τ_h, 210
λ_n, 67
∂^α, 130, 241
∂_j, 130
$\pi_Y(E)$, 146
$\int f$, 92, 94, 95
$\int f \, d\mu$, 92, 94, 95
$\int_A f$, 96
$\int_A f \, d\mu$, 96
$\int_I f(x) \, dx$, 107
$\int_X f \, d\mu$, 92, 94, 95
$\int_\Omega f(x) \, dx$, 149
$\int_\Omega f(x) \, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, 149
$\int_\Omega f(x,y) \, dxdy$, 149
$\sqcup$, 27

a. p. d., 24
approximation de l'identité, 211

base hilbertienne, 259

clan, 25
  engendré, $\mathscr{C}(\mathscr{A})$, 34
  induit, 28
classe monotone, 26
  engendrée, $\mathscr{M}(\mathscr{A})$, 34
coefficients de Fourier, 221
convergence en mesure, 71
coordonnées
  cylindriques, 179
  polaires, 177
  sphériques, 178
  sphériques généralisées, 179
coupe, 137
critère
  de Dini, 226
  de Dini-Lipschitz, 231
  de Jordan, 236
  de Lebesgue, 117
cube, 164
  taille d'un cube, 164

d. d. d., 27
déterminant jacobien, 166

égalité au sens du théorème du changement de variables, 172
égalité de Parseval, 222, 259
ensemble
  a. p. d., 24
  borélien, 37
  de Cantor maigre, 120
  dénombrable, 23
  élémentaire, 135
  Lebesgue mesurable, 106
  mesurable, $\mathscr{T}$-mesurable, 25
  négligeable, 56
escalier du diable, 120
espace
  de Lebesgue, 185
  mesurable, 27
  mesuré, 27
exposants conjugués, 189

fonction
  borélienne, 42
  caractéristique, χ_A, 27
  étagée, 42
  α-hölderienne, 231
  hölderienne, 231
  intégrable, 95
  intégrable positive, 94
  Lebesgue intégrable, 106
  Lebesgue mesurable, 42
  mesurable, 42

mesurable (définie p. p.), 152
mesurable (définie sur $A \subset X$), 44
mesurable (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$), 44
plateau, 209
qui a une intégrale, 95
qui a une intégrale (définie p. p.), 152
qui a une intégrale (définie sur $A \subset X$), 96
formule
d'inversion de la transformée de Fourier, 242
de dualité L^p–L^q, 190
de l'indicatrice de Banach, 182

gaussienne, 244

homéomorphisme, 38

inégalité
de Bessel, 221, 260
de Cauchy-Schwarz, 189
de Hölder, 189
de Markov, 101
de Minkowski, 195
de Tchebychev, 101
de Young (pour ab), 190
de Young (pour $f * g$), 201
intégrale
de Lebesgue, 95
de référence, 180
d'une fonction étagée positive, 92
d'une fonction mesurable, 95
d'une fonction mesurable positive, 94
généralisée, 106
intégrande, 91
isométrie de $\mathbb{R}^n$, 67

J_Φ, 166
$|J_\Phi|$, 166

laplacien, 252
lemme
de Fatou, 124
de Riemann-Lebesgue, 223, 241
d'Urysohn, 209

mesure, 27
mesure
à densité, 103
σ-additivité d'une mesure, 27
additivité d'une mesure, 54
borélienne, 61
complète, 57
complétée, $\overline{\mu}$, 57
de comptage, 28
de Dirac, 28
de Hausdorff, 87
de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, λ_n, 67
de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$, ν_n, 67
de probabilité, 61
de Radon dans $\mathbb{R}^n$, 61
de Stieltjes, 85
extension d'une mesure, 57
extérieure, 85
σ-finie, 61
finie, 61
monotonie d'une mesure, 54
produit, 137
sous-additivité d'une mesure, 54
module de continuité, 231
moyenne de Cesàro, 226
multi-indice, 241

noyau
de Dirichlet, 227
de Fejér, 227
régularisant, régularisant standard, 204

p. p., 59
pavé
de $\mathbb{R}^n$, 27, 66
de $X \times Y$, 135
ouvert de $\mathbb{R}^n$, 38
polynôme trigonométrique, 222

presque partout, μ-p. p., 59
probabilité, 61
produit de convolution, 201
projection orthogonale, 256
pseudométrique, 127

recouvrement dyadique, 164
relation de Chasles, 102
représentation
  admissible, 92
  canonique, 92

sommation par paquets, 112
somme de Darboux
  inférieure, 107
  supérieure, 118
suite d'ensembles
  suite croissante, $A_n \nearrow A$, 26
  suite décroissante, $A_n \searrow A$, 26
suite de fonctions
  convergeant presque uniformément, 71
  convergente en mesure, 71
  de Cauchy en mesure, 71
  de Cauchy presque uniforme, 71
symbole de Kronecker, 218
série commutativement convergente, 112

théorème
  d'approximation de Weierstrass, 214
  de Bernstein, 232
  de Cantor-Bernstein, 30
  de Carathéodory, 86
  de Carleson-Hunt, 236
  de continuité des intégrales à paramètre, 128
  de convergence dominée (de Lebesgue), 125
  de convergence décroissante, 102
  de convergence monotone (de Beppo Levi), 98
  de convergence monotone, variante p. p., 115
  de définition de la mesure produit, 137
  de dérivabilité des intégrales à paramètre, 130
  de différentiation de Lebesgue, 119
  de Dirichlet, 226
  de du Bois-Reymond, 236
  d'Egoroff, 71
  de Fatou (dans $L^2(]0, 2\pi[)$), 222
  de Fatou (dans $L^p(X)$), 195
  de Fejér, 226
  de Fubini, 147, 153
  (de convergence) de Kolmogorov, 237
  (de divergence) de Kolmogorov, 236
  de Lebesgue, 236
  de la classe monotone, 35
  de la suite croissante, 54
  de la suite décroissante, 54
  de Leibniz-Newton généralisé, 120
  de Plancherel, 248
  de M. Riesz, 236
  de représentation de James, 263
  de représentation de Riesz, 198, 262
  de Riesz-Fischer, 222
  de Tonelli, 146, 153
  du changement de variables, 171
  du presque changement de variables, 176
  intégrale d'une série, 102, 132
  réciproque du théorème de convergence dominée, 126
transformée de Fourier, 129, 239
  d'une gaussienne, 244
tribu, 25
tribu
  borélienne, $\mathscr{B}_X$, 37

complète, 57
complétée, $\overline{\mathscr{T}}$, 57
de Lebesgue, $\mathscr{L}_n$, 67
engendrée, $\mathscr{T}(\mathscr{A})$, 34
induite, 28
produit, 135

Bibliographie

[1] Banach, S. et Tarski, A.: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*. Fund. Math., 6 :244–277, 1924.

[2] Banach, S.: *Sur le problème de la mesure*. Fund. Math., 4 :7–23, 1923.

[3] Barbe, Ph. et Ledoux, M.: *Probabilité*. EDP Sciences, 2007.

[4] Bogachev, V. I.: *Measure theory. Vol. I*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[5] Brezis, H.: *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, 1983.

[6] Edwards, R. E.: *Fourier series. A modern introduction. Vol. 1*, tome 64 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 2e édition, 1979.

[7] Evans, L. C. et Gariepy, R. F.: *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[8] Federer, H.: *Geometric measure theory*, tome 153 de *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[9] Grafakos, L.: *Modern Fourier analysis*, tome 250 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 3e édition, 2014.

[10] Gramain, A.: *Intégration*. Collection Méthodes. Hermann, Paris, 1988.

[11] Halmos, P. R.: *Measure Theory*. Springer, 2e édition, 1974.

[12] Hausdorff, F.: *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig Viet., Leipzig, 1914.

[13] Hewitt, E. et Hewitt, R. E.: *The Gibbs-Wilbraham phenomenon : an episode in Fourier analysis*. Arch. Hist. Exact Sci., 21(2) :129–160, 1979/80.

[14] Hörmander, L.: *The analysis of linear partial differential operators. I*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, réédition de la 2e édition, 2003. Distribution theory and Fourier analysis.

[15] Lebesgue, H.: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[16] Lieb, E.H. et M. Loss: *Analysis*, tome 14 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second édition, 2001.

[17] Natanson, I.P.: *Theory of Functions of a Real Variable*, tome 1. Frederick Ungar Publishing Co., New York, NY, 1955.

[18] Natanson, I.P.: *Theory of Functions of a Real Variable*, tome 2. Frederick Ungar Publishing Co., New York, NY, 1960.

[19] Nedoma, J.: *Note on generalized random variables*. Dans *Transactions of the first Prague conference on information theory, statistical decision functions, random processes held at Liblice near Prague from November 28 to 30, 1956*, pages 139–141. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1957.

[20] Rudin, W.: *Analyse réelle et complexe*. Science sup. Dunod, 3e édition, 2009.

[21] Stein, E. M. et Shakarchi, R.: *Real analysis*, tome 3 de *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. Measure theory, integration, and Hilbert spaces.

[22] Taylor, M.E.: *Measure theory and integration*, tome 76 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[23] Willem, M.: *Analyse fonctionnelle élémentaire*. Cassini, Paris, 2003.

[24] Ziemer, W.: *Weakly differentiable functions*, tome 120 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1989. Sobolev spaces and functions of bounded variation.