Eléments d'Analyse Fonctionnelle

Exercices

Université Claude Bernard Lyon 1

Licence de mathématiques troisième année

Parcours Mathématiques générales et applications

Petru Mironescu

2026–2027

Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle — Année 2026–2027

Feuille de TD # 7

Espaces L^p. Convolution

Cadre. Sauf mention contraire, nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Sauf mention contraire, les fonctions considérées sont supposées mesurables. Les espaces $\mathscr{L}^p$ et L^p, $1 \leq p \leq \infty$, sont relatifs à cet espace mesuré. Pour s'habituer à l'autre notation courante, la norme $\| \ \|_{L^p}$ sera ici désignée par $\| \ \|_p$.

Exercice # 1. Soit X un ensemble fini muni de la tribu $\mathscr{P}(X)$ et de la mesure de comptage. Pour $1 \leq p \leq \infty$, décrire $\mathscr{L}^p$, L^p et calculer $\|f\|_p$ si $f : X \to \mathbb{R}$.

Exercice # 2. Nous munissons les parties boréliennes U de $\mathbb{R}^n$ de la mesure de Lebesgue ν_n. Décider pour quelles valeurs de p nous avons $f \in \mathscr{L}^p(U, \nu_n)$ si :

a) $U :=]0, 1[$, $f(x) := \dfrac{1}{x^a}$, $a \in \mathbb{R}$.

b) $U := \mathbb{R}$, $f := \chi_{\mathbb{Q}}$.

c) $U :=]0, \infty[$, $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$.

d) $U := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |x| > 1\}$, $f(x) := \dfrac{\sin |x|}{|x|^a}$, $a \in \mathbb{R}$ (avec « $|\ |$ » la norme euclidienne standard).

Pour traiter le cas où $p = \infty$, on pourra utiliser l'exercice # 12.

Exercice # 3. (Inégalité de Young) Soient $1 < p, q < \infty$ exposants conjugués. Alors

$$a\, b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \ \forall\, a, b \in [0, \infty[.$$

Indication : étudier, pour b fixé, la fonction $a \mapsto a^p/p + b^q/q - ab$.

Exercice # 4. Rappelons la définition de la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \ \forall\, x > 0.$$

Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe sur $]0, \infty[$. Indications : (i) À quoi revient la convexité d'une fonction continue ? (ii) L'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice # 5. Soient $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$.

a) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0,1[$ tel que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_0} + \dfrac{1-\theta}{p_1}$.

b) Montrer que $\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{\theta} \|f\|_{p_1}^{1-\theta}$, $\forall\, f$.

c) Retrouver la conclusion de l'exercice # 4.

Exercice # 6.

a) Soient $k \geq 2$ et $1 \leq p_1, p_2, \ldots, p_k \leq \infty$ tels que $\sum_{j=1}^{k} 1/p_j = 1$. Alors

$$\|f_1 f_2 \cdots f_k\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_k\|_{p_k},\ \forall\, f_1, f_2, \ldots, f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}.$$

b) Plus généralement, soient $k \geq 2$ et $1 \leq p_1, p_2, \ldots, p_k \leq \infty$, pas tous infinis. On définit $p \in]0,\infty[$ par la formule $\dfrac{1}{p} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j}$. Alors

$$\|f_1 f_2 \cdots f_k\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_k\|_{p_k},\ \forall\, f_1, f_2, \ldots, f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}.$$

Exercice # 7. Rappelons la définition de la fonction zêta :

$$\zeta(s) \coloneqq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s},\ \forall\, s \in]1,\infty[.$$

Euler a montré que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$. Plus modestement, montrer que $\zeta(3) < \dfrac{\pi^3}{24}$.

Exercice # 8.

a) Soit $(X, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé. Soient $f, g : X \to]0,\infty[$ deux fonctions mesurables telles que $f \cdot g \geq 1$. Montrer que $\int f\, dP \cdot \int g\, dP \geq 1$. Indication : l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

b) Si $a_1, \ldots, a_n > 0$, alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \geq n^2$.

Exercice # 9. (Espaces ℓ^p)

a) Si μ est la mesure de comptage, alors l'égalité p. p. équivaut à l'égalité. Ainsi, nous pouvons identifier naturellement $\mathscr{L}^p$ et L^p.

Si $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, alors nous définissons

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) := \mathscr{L}^p = L^p,\ \forall\, 1 \leq p \leq \infty.$$

Nous définissons de même $\ell^p(A)$, avec A a. p. d. (Cas particuliers importants : $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{N}^*$.)

b) Si $(a_n)_n$ est une suite indexée sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\|(a_n)_n\|_p = \begin{cases} \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p}, & \text{si } 1 \le p < \infty \\ \sup_n |a_n|, & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

c) Montrer que, si $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$, alors $\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset \ell^\infty$. De plus, ces inclusions sont « continues » : si $1 \le p \le r \le \infty$, alors $\|(a_n)_n\|_r \le \|(a_n)_n\|_p$.

d) Soit $(a_n)_n \in \ell^p$, avec $p < \infty$. Montrer que pour tout $r > p$ nous avons $\lim_{s \to r} \|(a_n)_n\|_s = \|(a_n)_n\|_r$.

e) Si $1 \le r < \infty$ et $(a_n)_n$ est une suite arbitraire, alors $\lim_{s \searrow r} \|(a_n)_n\|_s = \|(a_n)_n\|_r$.

Exercice # 10. (Espaces L^p quand la mesure est finie) Nous supposons μ finie.

a) Montrer que si $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$, alors $L^\infty \subset L^{p_2} \subset L^{p_1} \subset L^1$.

Plus spécifiquement, montrer que, $1 \le p \le r \le \infty$, alors $\|f\|_p \le (\mu(X))^{1/p - 1/r} \|f\|_r$, $\forall\, f$.

b) Si une variable aléatoire positive a un moment d'ordre $k \ge 2$ fini, montrer que ses moments d'ordre ℓ, avec $1 \le \ell \le k-1$, sont finis.

c) Soit $f \in L^p$, avec $p > 1$. Montrer que pour tout $1 \le r < p$ nous avons $\lim_{s \to r} \|f\|_s = \|f\|_r$.

d) Si $f \in L^\infty$, alors :

(i) $f \in L^p$, $\forall\, 1 \le p < \infty$.

(ii) L'application $[1, \infty] \ni p \mapsto \|f\|_p$ est continue. En particulier, $\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice # 11. Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables. Montrer les propriétés suivantes.

a) $\|tf\|_p = |t| \, \|f\|_p$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (avec la convention $0 \cdot \infty = 0$).

b) Si $f = g$ sont finies et égales p. p., alors $\|f - g\|_p = 0$ et $\|f\|_p = \|g\|_p$.

c) $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $f = 0$ p. p.

d) La définition de $\|f\|_\infty$ est correcte, au sens suivant. Soit $A := \{M \in [0, \infty] \,;\, |f(x)| \le M \text{ p. p.}\}$. Alors A est non vide et A a un plus petit élément, m. Cet m est le plus petit nombre C de $[0, \infty]$ avec la propriété $|f(x)| \le C$ p. p.

e) $\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ pour $p = 1$ et $p = \infty$. (Ici, $f, g : X \to \mathbb{R}$.)

Exercice # 12. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}_U$. Si $f \in C(U)$, montrer que $\|f\|_\infty = \sup_U |f|$.

Exercice # 13. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Nous considérons des fonctions $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (pas nécessairement mesurables). Montrer que la relation d'équivalence $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ p. p. a les propriétés suivantes.

a) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f + t\, g \sim f_1 + t\, g_1$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (à condition que les fonctions soient finies en tout point).

b) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f\,g \sim f_1\,g_1$.

c) Si $f \sim g$ et si $\Phi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, alors $\Phi \circ f \sim \Phi \circ g$.

d) Dans cette question, $X := \mathbb{R}^n$ et $\mu := \lambda_n$.

(i) Soit $\tau_h f(x) := f(x-h)$, $\forall\, x, h \in \mathbb{R}^n$. Si $f \sim g$, alors $\tau_h f \sim \tau_h g$, $\forall\, h$.

(ii) Soient $f, g, f_1, g_1 : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, avec $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $h \sim h_1$, où

$$h(y) := f(x-y)\,g(y),\ h_1(y) := f_1(x-y)\,g_1(y),\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice # 14. Nous considérons la relation d'équivalence de l'exercice précédent, mais uniquement pour des fonctions mesurables.

a) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_n, \lambda_n)$. Montrer que toute classe d'équivalence contient un représentant borélien.

b) Même propriété si à la place de $\mathbb{R}^n$ nous considérons une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$.

c) Généralisation ?

Exercice # 15. Donner un sens aux expressions suivantes.

a) « $f \in L^p$, $f \geq 0$ ».

b) « $[f \in L^p,\ \|f\|_p = 0] \implies f = 0$ ».

Exercice # 16. Donner un sens aux affirmations suivantes, puis les prouver ou les réfuter.

a) Si $f \in L^p$, alors f est mesurable.

b) Si $f \in L^p$, avec $1 \leq p < \infty$, alors f est finie p. p.

c) $f \in L^1 \implies \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > t\}) \leq \|f\|_1/t,\ \forall\, t > 0$.

Plus généralement, si $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p$, alors

$$f \in L^p \implies \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > t\}) \leq \|f\|_p^p/t^p,\ \forall\, t > 0 \text{ (\textit{inégalité de Markov})}.$$

Exercice # 17. Soit $1 < p < \infty$. Reprendre la preuve vue dans $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_p)$ pour montrer l'inégalité triangulaire dans $\mathscr{L}^p$.

Exercice # 18. Soit $1 \leq p < \infty$. Si f est mesurable, soit

$$F_f(t) := \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > t\})$$

la *fonction de répartition de* f.

a) Si μ est σ-finie, montrer la *formule du gâteau en étages*

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} F_f(t)\,dt. \tag{1}$$

b) Montrer que (1) reste vraie sans l'hypothèse μ σ-finie. Indications : commencer par une fonction étagée, et traiter le cas général par convergence monotone.

Exercice # 19. Nous travaillons dans $I =]0, \infty[$ muni de la mesure de Lebesgue. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p(I)$. Posons $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$, $\forall\, x \geq 0$.

a) Donner un sens à cette définition. Montrer que F est bien définie.

b) Si $p = \infty$, montrer que F est lipschitzienne.

c) Si $1 < p < \infty$, montrer que F est « hölderienne » : il existe $C < \infty$ et $\alpha \in]0, 1[$ (que l'on déterminera) tels que $|F(x) - F(y)| \leq C\, |x - y|^\alpha$, $\forall\, x, y \geq 0$.

d) Si $p = 1$, montrer que F est continue.

e) Si $p = 1$, montrer que F est « absolument continue » : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n$ sont tels que $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) < \delta$, alors $|F(b_1) - F(a_1)| + |F(b_2) - F(a_2)| + \cdots + |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon$. Indication : lemme de Lebesgue.

Exercice # 20. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Si $f_n \to f$ dans $\mathscr{L}^p$ et $f_n \to g$ p. p., quelle est la relation entre f et g ?

Exercice # 21. (Convergence dans $\mathscr{L}^p$ et convergence p. p.) Le corollaire 10.29 affirme que, si $f_n \to f$ dans $\mathscr{L}^p$, alors il existe une sous-suite (f_{n_k}) et une fonction $g \in \mathscr{L}^p$ telles que a) $f_{n_k} \to f$ p. p. et b) $|f_{n_k}| \leq g$ p. p.

a) S'inspirer de l'exercice # 39 de la feuille # 3 pour montrer qu'en général, pour avoir les propriétés a) ou b) dans le corollaire 10.29, il faut passer à une sous-suite.

b) Voici un cas remarquable où il n'est pas nécessaire de passer à une sous-suite. Soit $(f_n) \subset \mathscr{L}^p$ telle que $\sum \|f_{n+1} - f_n\|_{L^p} < \infty$. Montrer qu'il existe $f, g \in \mathscr{L}^p$ telles que $|f_n| \leq g$ p. p. et $f_n \to f$ p. p. et dans $\mathscr{L}^p$. Indication : reprendre la preuve du théorème 10.28.

Exercice # 22. (« Fubinisation » de la convergence dans $\mathscr{L}^p$) Dans cet exercice, nous travaillons avec la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$. Soit $1 \leq p < \infty$. Soient $(f_n) \subset \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^2)$ et $f, g \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^2)$ telle que $f_n \to f$ p. p. et $|f_n| \leq g$ p. p. (À une sous-suite près, ce sont des conditions nécessaires pour avoir $f_n \to f$ dans $\mathscr{L}^p$; voir le corollaire 10.29). Montrer que, pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, $f_n(\cdot, y) \to f(\cdot, y)$ dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.

Généralisation ?

Exercice # 23. (Lemme de Brezis-Lieb) Soit $1 \leq p < \infty$. Nous considérons une suite $(f_j) \subset \mathscr{L}^p$ telle que :

i) $\|f_j\|_p \leq C_0 < \infty$, $\forall\, j$.

ii) $f_j \to f$.

a) Montrer que $f \in \mathscr{L}^p$.

b) A-t-on nécessairement $f_j \to f$ dans $\mathscr{L}^p$?

Dans la suite, nous nous proposons de montrer le *lemme de Brezis-Lieb*

$$\int |f_n|^p = \int |f|^p + \int |f_n - f|^p + o(1) \text{ quand } n \to \infty. \tag{2}$$

En fait, nous allons montrer la conclusion plus forte

$$\int ||f_n|^p - |f|^p - |f_n - f|^p| \to 0. \tag{3}$$

c) Expliquer pourquoi (3) $\implies$ (2).

d) Si $p = 1$, montrer que

$$||f_n| - |f - f_n|| \leq |f|$$

et conclure via le théorème de convergence dominée.

e) Si $1 < p < \infty$, montrer que :

(i) Il existe $C < \infty$ telle que

$$||t|^p - |t-1|^p - 1| \leq \begin{cases} C, & \text{si } |t| \leq 1 \\ C|t|^{p-1}, & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}.$$

(ii) En déduire que

$$||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p| \leq \begin{cases} C|f|^p, & \text{si } |f_n| \leq |f| \\ C|f_n|^{p-1}|f|, & \text{si } |f_n| \geq |f| \end{cases}. \tag{4}$$

(iii) Soit $M \geq 1$. On définit

$$A_{n,M} := \{x \in X \,;\, |f_n(x)| \leq M|f(x)|\},$$
$$B_{n,M} := \{x \in X \,;\, |f_n(x)| > M|f(x)|\}.$$

En utilisant (4) et le théorème de convergence dominée, montrer que

$$\int_{A_{n,M}} ||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p| \to 0.$$

(iv) Montrer que

$$\int_{B_{n,M}} |f|^p \leq \frac{C_0^p}{M^p}. \tag{5}$$

(v) Utiliser (5), la deuxième inégalité de (4) et l'inégalité de Hölder pour montrer que

$$\lim_{M \to \infty} \sup_n \int_{B_{n,M}} ||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p|| = 0.$$

(vi) Conclure.

Exercice # 24.

a) En examinant la preuve de l'inégalité de Hölder, montrer le résultat suivant.

Soient $f \in L^p\backslash\{0\}$ et $g \in L^q\backslash\{0\}$, avec $1 < p, q < \infty$ conjugués et $f, g \geq 0$. Alors

$$\int fg = \|f\|_p \, \|g\|_q \iff [\exists\, C \in]0, \infty[\text{ tel que } f^p = C\, g^q].$$

b) Si nous ne supposons plus $f, g \geq 0$, montrer que

$$\int fg = \|f\|_p \, \|g\|_q \iff [\exists\, C \in]0, \infty[\text{ tel que } |f|^{p-1}\, f = C\, |g|^{q-1}\, g].$$

Exercice # 25. a) En utilisant éventuellement l'exercice précédent, montrer le résultat suivant.

Si $1 < p < \infty$ et $f, g \in L^p\backslash\{0\}$, alors

$$\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p \iff [\exists\, C \in]0, \infty[\text{ tel que } f = C\, g].$$

b) Que devient cette condition si $p = 1$?

Avant-propos historique. L'exercice qui suit est basé sur une très belle idée de F. Riesz, idée exposée dans une lettre à G. H. Hardy. Hardy proposa à Riesz de publier une partie de la lettre dans la revue *Journal of the London Mathematical Society* (1930), puis reprit l'idée dans sa monographie *Inequalities* (1934), écrite avec J. E. Littlewood. L'histoire a retenu, à tort, cette méthode comme due à Hardy et Littlewood. Par ailleurs, cette méthode a été perfectionnée par H. S. Allen, dans *The Quarterly Journal of Mathematics* (1940). La méthode sera également employée dans l'exercice # 45 de la feuille d'exercices de synthèse et avancés.

Exercice # 26. (Inégalités pour des opérateurs à noyau) Nous travaillons dans un espace produit $(X \times Y, \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}, \mu \otimes \nu)$, avec μ et ν σ-finies. Toutes les fonctions considérées sont *finies*, *mesurables* et, par souci de simplicité, *positives*. Un *noyau* est une fonction $K : X \times Y \to \mathbb{R}_+$.

Soient $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués. Pour $f : X \to \mathbb{R}_+$, $g : Y \to \mathbb{R}_+$, nous voulons majorer les quantités

$$A = A(f, g) := \int_{X \times Y} K(x, y)\, f(x)\, g(y)\, d\mu \otimes \nu(x, y),$$
$$B = B(f) := \left\| y \mapsto \int_Y K(x, y)\, f(x)\, d\mu(x) \right\|_p .$$

a) Montrer que

$$B(f) = \sup\{A(f, g)\,;\, g \in \mathscr{L}^q(Y; \mathbb{R}_+),\, \|g\|_q \leq 1\}.$$

b) Soient $\alpha : X \to \mathbb{R}_+^*$, $\gamma : Y \to \mathbb{R}_+^*$. En utilisant l'identité (évidente)

$$K(x,y)\, f(x)\, g(y) = \left([K(x,y)]^{1/p} \frac{\alpha(x)}{\gamma(y)} f(x) \right) \times \left([K(x,y)]^{1/q} \frac{\gamma(y)}{\alpha(x)} g(y) \right),$$

l'inégalité de Hölder (avec les exposants p et q) et le théorème de Tonelli, obtenir l'inégalité

$$\begin{aligned} A(f,g) \leq & \left(\int_X F(x)\, \alpha^p(x)\, f^p(x)\, d\mu(x) \right)^{1/p} \\ & \times \left(\int_Y G(y)\, \gamma^q(y)\, g^p(y)\, d\nu(y) \right)^{1/q}, \end{aligned} \tag{6}$$

où

$$F(x) := \int_Y \frac{K(x,y)}{\gamma^p(y)} d\nu(y),\ G(y) := \int_X \frac{K(x,y)}{\alpha^q(x)}\, d\mu(x).$$

c) (Inégalité de Schur) En prenant $\alpha(x) \equiv 1$, $\gamma(y) \equiv 1$, obtenir l'*inégalité de Schur*

$$B(f) \leq \left[\sup_{x \in X} \int_Y K(x,y)\, d\nu(y) \right]^{1/p} \left[\sup_{y \in Y} \int_X K(x,y)\, d\mu(x) \right]^{1/q} \|f\|_p.$$

d) (Inégalité de Young) En prenant $\alpha(x) \equiv 1$ et $\gamma(y) \equiv 1$, obtenir, pour $f, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, l'*inégalité de Young* $\|h * f\|_p \leq \|h\|_1 \|f\|_p$.

e) (Inégalité de Hardy) En prenant $\alpha(x) = \gamma(x) = x^{1/(p+q)}$, obtenir l'*inégalité de Hardy*

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} \left(\int_0^x f(y)\, dy \right)^p dx \leq q^p \int_0^\infty f^p(x)\, dx.$$

f) (Inégalités de Hilbert-Schur-Hardy-Riesz) *Préliminaire.* Nous admettons la *formule des compléments* (due à Euler)

$$\int_0^\infty \frac{1}{(t+1)\, t^a}\, dt = \frac{\pi}{\sin(\pi a)},\ \forall\, 0 < a < 1.^\dagger$$

En prenant $\alpha(x) = \gamma(x) = x^{1/(p+q)}$, montrer les *inégalités de Hilbert-Schur-Hardy-Riesz*

$$\int_{]0,\infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\, dxdy \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \|f\|_p \|g\|_q,$$

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y}\, dx \right|^p dy \leq \left(\frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \right)^p \|f\|_p^p.$$

†Cette identité peut s'obtenir, par exemple, en appliquant le théorème des résidus en analyse complexe.

Exercice # 27. (Inégalité de Hardy, encore) Nous proposons ici une autre approche pour montrer l'inégalité de Hardy obtenue dans l'item e) de l'exercice précédent. Nous travaillons dans $I =]0, \infty[$ muni de la mesure de Lebesgue. Soit $1 < p < \infty$. Si $f \in \mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(I)$, nous posons $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$, $\forall\, x > 0$.

a) Si $f \in C_c^\infty(I)$, montrer à l'aide d'une intégration par parties l'*inégalité de Hardy*

$$\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p\,dx. \tag{7}$$

b) Montrer que l'inégalité (7) reste vraie pour tout $f \in \mathscr{L}^p$.

Exercice # 28. (Inégalité de Landau)

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est Lebesgue intégrable, montrer qu'il existe une suite $(R_n)_n$ telle que :
   (i) $2n \leq R_n \leq 2n+1$, $\forall\, n$.
   (ii) $f(R_n) \to 0$.

b) Si, de plus, f est dérivable, montrer qu'il existe une suite $(S_n)_n$ telle que
   (i) $R_n < S_n < R_{n+1}$, $\forall\, n$ (et donc $S_n \to \infty$).
   (ii) $f(S_n)\, f'(S_n) \to 0$.

   Indication : appliquer le théorème des accroissements finis à f^2.

   De même, il existe $(T_n)_n$ telle que $T_n \to -\infty$ et $f(T_n)\, f'(T_n) \to 0$.

c) (Inégalité de Landau) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que f soit (Lebesgue) intégrable et f'' soit bornée. Montrer que $f' \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \nu_1)$ et l'*inégalité de Landau*

$$\int_{\mathbb{R}} (f')^2 \leq \|f''\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

   On pourra commencer par calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{T_n}^{S_n} (f')^2(x)\,dx$ si, de plus, $f \in C^2$.

Exercice # 29. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions mesurables. Nous avons $f * g(x) = g * f(x)$, au sens du théorème du changement de variables.

Exercice # 30. (Approximation « à la main » par des fonctions plus lisses (I)) Pour $1 \leq p < \infty$, le résultat principal sur la convolution, théorème 11.10, donne une famille explicite de fonctions C^∞ qui convergent vers $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Dans cet exercice, nous proposons une construction moins puissante, mais plus simple à implémenter, pour approcher des fonctions continues. Cette construction complète celle présentée dans l'introduction du chapitre 11.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g := \dfrac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Posons $g_1 \coloneqq g$ et, par récurrence, $g_{j+1} \coloneqq g_j * g_1$. Calculer g_2 et g_3.

b) Soit F une primitive de f. Posons $F_1 \coloneqq F$ et, par récurrence, soit F_{j+1} une primitive de F_j. Exprimer $f * [(g_j)_\varepsilon]$ en fonction de F_j.

c) Montrer que $f * [(g_j)_\varepsilon] \in C^j$ et que $f * [(g_j)_\varepsilon] \to f$ simplement quand $\varepsilon \to 0$.

d) Si, de plus, f est uniformément continue, montrer que $f * [(g_j)_\varepsilon] \to f$ uniformément quand $\varepsilon \to 0$.

On pourra commencer par traiter les cas $j = 1, 2$.

Exercice # 31. (Approximation « à la main » par des fonctions plus lisses (II)) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

a) Que savez-vous des limites latérales $f(x \pm 0)$ de f ?

b) Et de l'intégrabilité de Riemann ou de Lebesgue de f sur un intervalle compact ?

c) Soit $F^\varepsilon(x) \coloneqq \dfrac{1}{2\varepsilon} \displaystyle\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y)\, dy$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Montrer que F^ε est continue et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F^\varepsilon(x) \to \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ quand $\varepsilon \to 0$.

d) En déduire que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $F^\varepsilon(x) \to f(x)$ quand $\varepsilon \to 0$. D'ailleurs, le p. p. est par rapport à quelle mesure ?

e) Pour la culture générale. Soit $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ (par rapport à la mesure de Lebesgue). Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $F^\varepsilon(x) \to f(x)$ quand $\varepsilon \to 0$. Ce résultat découle du théorème de différentiation de Lebesgue 6.56.

Exercice # 32. Soient $\rho \in L^1_c(\mathbb{R})$ et $f(x) \coloneqq x^k$, avec $k \geq 1$ entier et $x \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer explicitement $f * \rho_\varepsilon$.

b) Montrer que $f * \rho_\varepsilon \to f$ simplement quand $\varepsilon \to 0$.

c) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour avoir $f * \rho_\varepsilon \to f$ uniformément quand $\varepsilon \to 0$.

Exercice # 33. Calculer explicitement $f * \rho_\varepsilon$, avec $f(x) \coloneqq x^2$ et $\rho(x) \coloneqq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exercice # 34.

a) Donner un sens à l'énoncé suivant et le montrer. « $(L^1(\mathbb{R}^n), +, *)$ est une algèbre associative et commutative. »

b) Montrer que cette algèbre n'est pas unitaire. Indication : raisonner par l'absurde et considérer $e * \rho_\varepsilon$, avec e unité de l'algèbre et ρ noyau régularisant.

Exercice # 35. a) Soit $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que $\{f \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{T}, \mu)\,;\, f \text{ étagée}\}$ est dense dans $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{T}, \mu)$. Il convient de distinguer les cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.

b) On travaille dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$, avec μ mesure de Radon. Si $1 \leq p < \infty$, montrer que

$$\left\{ \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{K_j} \; ; \; k \in \mathbb{N}^*, \; a_j \in \mathbb{R}, \; K_j \text{ compact}, \; \forall \, j \right\}$$

est dense dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$.

Exercice # 36. Soit ρ un noyau régularisant standard. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons :

a) $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$ si $|x| < \varepsilon$.
b) $\rho_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| \geq \varepsilon$.
c) $\int \rho_\varepsilon = 1$.

Exercice # 37. Une *approximation de l'identité* est une famille $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que :

i) $\zeta^\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est (Lebesgue) intégrable, $\forall \, \varepsilon > 0$.
ii) $\int \zeta^\varepsilon = 1$, $\forall \, \varepsilon > 0$.
iii) Il existe une constante $M < \infty$ telle que $\int |\zeta^\varepsilon| \leq M$, $\forall \, \varepsilon > 0$.
iv) Pour tout $\delta > 0$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |\zeta^\varepsilon| = 0$.

a) Montrer que, si $\rho \in \mathscr{L}^1(R^N)$ (avec la mesure de Lebesgue) et $\int \rho = 1$, alors $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, est une approximation de l'identité.
b) Soit $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'identité.
   (i) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est bornée et uniformément continue, montrer que $f * \zeta^\varepsilon \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^n$.
   (ii) Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, montrer que $f * \zeta^\varepsilon \to f$ dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$.
   (iii) Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ (avec la mesure de Lebesgue), montrer que $f * \zeta^\varepsilon \to f$ dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Exercice # 38. Soient $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Alors :

a) $f * \varphi$ est défini en tout point.
b) $f * \varphi \in C^k$.
c) Pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$, $\partial^\alpha (f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi$.
d) Si f est un polynôme (de n variables) de degré $\leq m$, alors $f * \varphi$ est un polynôme de degré $\leq m$.

Exercice # 39. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $1 \leq p_1, \ldots, p_k < \infty$. Soit $f \in \mathscr{L}^{p_1}(\Omega) \cap \ldots \cap \mathscr{L}^{p_k}(\Omega)$. Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_j \to f$ quand $j \to \infty$ dans $\mathscr{L}^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, k$.

Exercice # 40. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $C^\infty(\Omega) \cap \mathscr{L}^\infty(\Omega)$ et $C_c^\infty(\Omega)$ ne sont pas denses dans $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$.

Exercice # 41. Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$. Soient p, q deux exposants conjugués. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, montrer que $f * g$ est continue.

Exercice # 42. Cet exercice fait (partiellement) suite à l'exercice # 30. Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ un borélien borné de mesure de Lebesgue $\nu_n(B) > 0$. Soit $g := \dfrac{1}{\nu_n(B)}\chi_B$. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue, montrer que $f * g_\varepsilon$ est continue, et que $f * g_\varepsilon \to f$ simplement quand $\varepsilon \to 0$.

Dans le cas particulier de la boule unité, montrer que ce résultat devient

$$⨍_{B(x,\varepsilon)} f(y)\,dy \to f(x) \text{ simplement quand } \varepsilon \to 0.$$

Exercice # 43. Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$. Nous nous proposons de montrer le résultat suivant : si $A, B \in \mathscr{L}_n$ satisfont $\lambda_n(A) > 0$, $\lambda_n(B) > 0$, alors l'ensemble $A + B$ contient une boule ouverte non vide.

a) Montrer que l'on peut supposer A et B compacts.

b) Montrer que $f := \chi_A * \chi_B$ est continue.

c) Calculer $\int f$ et conclure.

Exercice # 44. (Résolution de l'équation de la chaleur dans le demi-espace) Nous travaillons dans $(R^n, \mathscr{L}_n, \lambda_n)$. $|\ |$ désigne la longueur euclidienne standard dans $\mathbb{R}^n$. (Donc $|x| = \|x\|_2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.) Soit

$$K_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t > 0,$$

le *noyau de la chaleur*.

Soient $1 \le p \le \infty$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{L}^p$. Sous réserve d'existence, soit

$$u(x,t) := f * K_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K_t(x-y)\,dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t > 0.$$

a) Montrer que :

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times]0, \infty[)$.

(ii) u vérifie l'*équation de la chaleur* homogène

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[.$$

b) Si $1 \le p < \infty$, montrer que « $u(\cdot, 0) = f$ »*, au sens où

$$\lim_{t \to 0} u(\cdot, t) = f \text{ dans } \mathscr{L}^p.$$

*Noter que u n'est pas définie pour $t = 0$.

c) Si f est continue et bornée, montrer que

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

d) Si f est uniformément continue et bornée, montrer que

$$u(\cdot,t) \to f \text{ uniformément sur } \mathbb{R}^n \text{ quand } t \to 0.$$

Les deux exercices suivants sont importants en théorie des probabilités : ils permettent de calculer la loi de la somme de deux vecteurs aléatoires indépendants. Cependant, l'application aux vecteurs aléatoires ne sera pas étudiée dans ce cours.

Exercice # 45. (Produit de convolution de deux mesures) Soient μ, ν deux mesures boréliennes σ-finies sur $\mathbb{R}^n$. À chaque ensemble borélien de $\mathbb{R}^n$, nous associons l'ensemble

$$F = F(E) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,;\, x+y \in E\}.$$

a) Montrer que F est borélien.
b) Montrer que la formule $\xi(E) := \mu \otimes \nu(F),\ \forall\, E \in \mathscr{B}_{R^n}$, définit une mesure borélienne ξ sur $\mathbb{R}^n$. Cette mesure est le *produit de convolution* des mesures μ et ν, noté $\mu * \nu$.
c) Montrer que le produit de convolution est commutatif.
d) Si les mesures boréliennes μ, ν, η sont finies, alors leur produit est associatif.
e) Montrer que δ_0 (la mesure de Dirac en 0) est l'élément neutre de la convolution.
f) Si μ et ν sont des mesures à densités f, respectivement g, par rapport à ν_n, montrer que $\mu * \nu$ a la densité $f * g$.
g) Si μ est à densité f par rapport à ν_n, alors $\mu * \nu$ a la densité $f * \nu$, où

$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, d\nu(y),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice # 46. (Convolution d'une fonction et d'une mesure) Cet exercice fait suite à l'exercice précédent. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne, et μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$, nous posons, sous réserve d'existence,

$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, d\nu(y),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

a) Si f est Lebesgue intégrable et μ est finie, alors $f * \mu$ est définie ν_n-p. p., et est une fonction Lebesgue intégrable. Indication : théorème de Fubini.
b) Si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ et μ est une mesure de Radon, alors $f * \mu$ est définie en tout point, et est une fonction de classe C^k.

Exercice # 47. (Équations de Cauchy) Nous considérons les *équations fonctionnelles* (de Cauchy) suivantes :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\},\ g(x+y) = g(x)\, g(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Un résultat très connu affirme que, si f est une solution *continue* de (8), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = Ax, \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement).} \tag{10}$$

Un résultat un peu moins connu affirme que, si g est une solution *continue* de (9), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) = e^{\imath Ax}, \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement).} \tag{11}$$

Ces conclusions ne sont plus vraies s'il n'y a aucune hypothèse sur f et g, mais donner des contre-exemples sort du cadre de cet enseignement. (En demander en algèbre.)

Nous nous proposons de montrer que (10) et (11) restent vraies sous l'hypothèse plus faible que f (ou g) est *Lebesgue mesurable*. Nous assumons cette hypothèse dans ce qui suit, et nous travaillons avec la mesure de Lebesgue.

Pour commencer, nous admettons la propriété qui suit, qui sera démontrée plus loin.

$$\text{Si } g \in L^\infty(\mathbb{R})\backslash\{0\},\ \text{alors il existe } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ telle que } \int_{\mathbb{R}} g(y)\, \psi(y)\, dy \neq 0. \tag{12}$$

a) Soit g solution Lebesgue mesurable de (9). En multipliant (9) par $\psi(y)$, avec ψ comme dans (12) (avec $n = 1$), et en intégrant dans la variable y, montrer que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

   Puis conclure grâce au préambule de l'exercice.

b) Soit f une solution Lebesgue mesurable de (8). Soit $g := e^{\imath f}$. En utilisant la question précédente pour g, montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ et une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tels que

$$f(x) = Ax + 2\pi\, h(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

c) (i) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ une fonction telle que

$$h(x+y) = h(x) + h(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

(aucune hypothèse de mesurabilité).

Montrer que $h(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(ii) Conclusion ?

d) Montrons (12). Soit $A := \{y \in \mathbb{R}\,;\, g(y) \neq 0\}$.

(i) Expliquer pourquoi $\lambda_1(A) > 0$.

(ii) Montrer qu'il existe $K \subset A$ un compact tel que $\nu_1(K) > 0$. Indication : la mesure de Lebesgue est une mesure de Radon.

(iii) Soit ρ un noyau régularisant. Montrer que (12) est vraie si $\psi := (\operatorname{sgn} g\, \chi_K) * \rho_\varepsilon$, avec ε suffisamment petit. Indication : convergence dominée.

e) Généraliser ce qui précède à des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}$.

Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle — Année 2026–2027

Feuille de TD # 8

Espaces de Hilbert

Cadre. Dans ce qui suit, H est un *espace de Hilbert réel* (sauf si l'énoncé précise qu'il s'agit d'un espace de Hilbert complexe), et E un *espace préhilbertien réel*. Le produit scalaire, respectivement la norme induite sur H ou E, sont notés $\langle\ ,\rangle$, respectivement $\|\ \|$.

Exercice # 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable. Montrer l'équivalence

$$0 \text{ est un point de minimum de } f \iff f'(0) \geq 0.$$

Exercice # 2. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \max\{\langle x, y\rangle ;\ y \in E, \|y\| \leq 1\}.$$

Exercice # 3. Montrer que

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right],\ \forall\, x, y \in E.$$

Exercice # 4. On considère un espace vectoriel réel X muni d'une norme $\|\ \|$ vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,\ \forall\, x, y \in X.$$

L'objectif est de montrer que X muni de cette norme est nécessairement un espace préhilbertien. Il s'agit donc de construire un produit scalaire induisant $\|\ \|$. Compte tenu de l'exercice précédent, posons

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right],\ \forall\, x, y \in X.$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

a) Montrer que, pour tout $x, y \in X$, on a $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ et $\langle -x, y\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle$.
b) Montrer que, pour tout $x, y, z \in X$, on a $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$. (On pourra montrer d'abord l'égalité suivante : $\langle x+y, z\rangle = 2\langle y, z\rangle + \langle x-y, z\rangle$.)
c) Montrer, en utilisant b), que, si $x, y \in X$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a $\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle$. En utilisant un argument de continuité, montrer que cette égalité reste encore vraie pour tout $r \in \mathbb{R}$.

d) En déduire que $\langle\ ,\rangle$ est bien un produit scalaire sur X qui induit la norme $\|\ \|$.

Exercice # 5. (Inégalité de Bessel) Soit $(e_j)_{1\leq j<N} \subset E$ (avec $N = 2, 3, \ldots, \infty$) une suite orthonormée d'une espace pré-hilbertien E. Montrer que

$$\sum_{1\leq j<N} < x, e_j >^2 \leq \|x\|^2,\ \forall\, x \in E \text{ (inégalité de Bessel)}$$

et que, si N est fini, cette inégalité devient

$$\left\| \sum_{1\leq j<N} < x, e_j > \ e_j \right\|^2 \leq \|x\|^2,\ \forall\, x \in E.$$

Exercice # 6. (Matrice de Gram et matrice de Hilbert)

a) Soit $(f_j)_{0\leq j<N}$ (avec $N = 1, 2, \ldots, \infty$) une famille libre dans l'espace pré-hilbertien E. On considère la matrice carrée (possiblement avec une infinité de lignes et colonnes) $G \coloneqq (g_{ij})_{0\leq i,j<N}$, avec $g_{ij} \coloneqq < f_j, f_i >$, $\forall\, i, j$. C'est la *matrice de Gram* de la famille $(f_j)_{0\leq j<N}$. Montrer que cette matrice est symétrique et, si $M \leq N$ est fini, alors la sous-matrice $(g_{ij})_{0\leq i,j<M}$ est définie positive.

b) Soient $E \coloneqq \mathbb{R}[X]$ et $f_j \coloneqq X^j$, $\forall\, j \geq 0$. Trouver un produit scalaire sur E tel que $< f_j, f_i >= \dfrac{1}{i+j+1}$, $\forall\, i, j \in \mathbb{N}$.

c) En déduire que la *matrice de Hilbert*

$$G \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & \cdots \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

a la propriété que toutes les sous-matrices $(g_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$, avec $n \in \mathbb{N}$, sont définies positives.

Exercice # 7. Soit $(e_j)_{j\geq 1} \subset H$ une suite orthonormée. Soit $(a_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$\sum_{j\geq 1} a_j e_j \text{ converge } \iff \sum_{j\geq 1} a_j^2 < \infty.$$

En cas de convergence de l'une des séries, montrer que $\left\|\sum_{j\geq 1} a_j e_j\right\|^2 = \sum_{j\geq 1} a_j^2$.

Exercice # 8. Soient F et G deux sous-espaces fermés orthogonaux de H. Montrer que $F + G$ est fermé.

Exercice # 9. Soit F une partie non-vide de H. Montrer que :

a) $F^\perp$ est un sous-espace fermé de H.
b) $\overline{\text{Vect}\,(F)}^\perp = F^\perp$.
c) $F^{\perp\perp} = \overline{\text{Vect}\,(F)}$. En particulier, si F est un sous-espace fermé de H, alors $F^{\perp\perp} = F$.

Exercice # 10. Soit F un sous-espace de H. Montrer l'équivalence

$$F \text{ est dense dans } H \iff F^\perp = \{0\}.$$

Exercice # 11. Soient F et G deux sous-espaces fermés de H. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = \overline{F^\perp + G^\perp}$.

Exercice # 12. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$, muni de sa norme usuelle.

a) Montrer que

$$G := \left\{ f \in H \,;\, \int_0^1 f = 0 \right\}$$

est un sous-espace fermé de H, et déterminer $G^\perp$.
b) Soient $C_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à support compact, et

$$F := \left\{ f \in C_c(\mathbb{R}) \,;\, \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

Montrer que $\overline{F} = G$.
c) Déterminer l'ensemble $\{g \in C_c(\mathbb{R}) \,;\, g \in F^\perp\}$.

Exercice # 13. Soient $H = L^2(]0,1[)$ muni de sa norme usuelle et

$$V := \left\{ f \in H \,;\, \int_0^1 f = \int_0^{1/2} f = 0 \right\}.$$

a) Montrer que V est un sous-espace fermé de H. Déterminer une base de $V^\perp$.
b) Soit $f(x) := x$. Calculer la projection orthogonale de f sur V, puis $d(f, V)$.

Exercice # 14. Déterminer la quantité suivante

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} |\sin x - a - bx|^2 \, dx.$$

La borne inférieure est-elle atteinte ?

Exercice # 15.

a) Déterminer la projection orthogonale sur la boule unité fermée de H.

b) Déterminer la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par une famille orthonormée finie de H.

Exercice # 16. (Moyenne et moindres carrés) Dans un espace probabilisé, montrer que la projection (de la classe) d'une fonction $f \in \mathscr{L}^2$ sur la droite des fonctions constantes est son espérance. Écrire cette propriété comme la solution d'un problème des moindres carrés.

Exercice # 17. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $A, B \in \mathscr{F}$, avec $\mathbb{P}(B) > 0$. Soit $F \coloneqq \mathbb{R}\chi_B$. Montrer que

$$p_F\chi_A = (\mathbb{P}(A|B))\chi_B,\ \mathbb{E}\left(p_F\chi_A\right) = \mathbb{P}(A \cap B).$$

Exercice # 18. (Tout convexe fermé est intersection de demi-espaces affines fermés) Un demi-espace affine fermé de H est de la forme $D_{a,\alpha} \coloneqq \{z \in H\ ;\ < z, a > \leq \alpha\}$, avec $a \in H\backslash\{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Si $H = \mathbb{R}^2$ avec la norme euclidienne standard, montrer que $D_{a,\alpha}$ est l'un des deux demi-plans fermés déterminés par la droite d'équation $z \cdot a = \alpha$. Comment reconnaître graphiquement de quel demi-plan il s'agit ? Généralisation ?

   Retour, dans la suite, au cas général.

b) Montrer que $D_{a,\alpha}$ est un convexe fermé, et qu'une intersection de tels demi-espaces est un convexe fermé.

c) Soit maintenant C un convexe fermé non-vide. Soit $x \in H\backslash C$, et soit $y \coloneqq p_C(x)$. Montrer que $C \subset D_{x-y,<y,x-y>}$.

d) Montrer que $C = \bigcap_{x \in H\backslash C} D_{x-y,<y,x-y>}$ (avec, pour chaque x, $y \coloneqq p_C(x)$).

Exercice # 19. Le but de cet exercice est d'étudier « à la main » dans l'espace ℓ^2 l'existence d'une base hilbertienne et la validité du théorème de représentation de Riesz.

a) Quel est le produit scalaire dans ℓ^2 ?

b) Montrer que la « base canonique » $(e^n)_{n\geq 0}$, avec $(e^n)_j = \delta^n_j$, $\forall\, j, n \geq 0$, est une base hilbertienne de ℓ^2.

c) Montrer que cette base n'est pas une base algébrique de ℓ^2.

d) Soit $\varphi : \ell^2 \to \mathbb{R}$ linéaire et continue. Posons $\alpha_n \coloneqq \varphi(e^n)$ et $a \coloneqq (\alpha_n)_{n\geq 0}$. Montrer que $a \in \ell^2$ et que $\varphi(x) = < x, a >$, $\forall\, x \in \ell^2$.

e) Soit maintenant $1 \leq p < \infty$. Soit $\varphi : \ell^p \to \mathbb{R}$ linéaire continue. Reprendre la démarche de l'item précédent et montrer qu'il existe $a = (\alpha_n)_{n\geq 0} \in \ell^q$ (avec q le conjugué de p) tel que $\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} a_n\alpha_n$, $\forall\, x = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$.

Exercice # 20. ($H = \ell^2$) Le but de cet exercice est de montrer qu'un espace de Hilbert H de dimension infinie et séparable s'identifie « naturellement » à ℓ^2. Soit

$(e^n)_{n\geq 0}$ la base canonique de ℓ^2 (voir l'exercice # 19). Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de H. Soit

$$U : \ell^2 \to H,\ U\left(\sum_{n\geq 0} a_n e^n\right) := \sum_{n\geq 0} a_n e_n,\ \forall\, (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2.$$

Montrer que U est : (i) bien définie ; (ii) linéaire ; (iii) une isométrie ; (iv) bijective ; (v) de réciproque isométrie. (Une telle fonction est un *opérateur unitaire*.) Par ailleurs, montrer que U : (vi) préserve le produit scalaire ; (vii) envoie une base hilbertienne de ℓ^2 vers une base hilbertienne de H.

Ainsi, U et U^{-1} « transportent » entre ℓ^2 et H toutes les propriétés d'un espace de Hilbert, et permettent d'identifier les deux espaces.

Exercice # 21. Soit $e_n(x) := e^{inx}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, x \in]0, 2\pi[$. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0, 2\pi[, \mathscr{B}_{]0,2\pi[}, 1/(2\pi)\nu_1)$.

Exercice # 22. Montrer qu'un espace préhilbertien qui a une base algébrique orthonormée infinie $\mathscr{B}$ n'est pas complet. Indication : soit $(e_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{B}$ une suite orthonormée. Soit $x_n := \sum_{j=1}^{n} (1/j^2) e_j$, $\forall\, n \geq 1$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, mais ne converge pas.

Exercice # 23. On considère $\mathbb{R}[X]$ muni de

$$< P, Q >:= \int_0^1 P(x)Q(x)\, dx,\ \forall\, P, Q \in \mathbb{R}[X].$$

a) Montrer que $< , >$ est bien un produit scalaire.

b) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $\exp$ sur $[0, 1]$.

Montrer que cette suite est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[X], < , >)$.

c) En déduire sur $(\mathbb{R}[X], < , >)$ n'est pas complet.

Exercice # 24.

a) Obtenir la conclusion de l'exercice # 23 de la manière suivante. Soit E espace vectoriel qui a une base algébrique dénombrable. Alors, quel que soit le produit scalaire sur E, E n'est pas complet.

b) La propriété de l'item précédent n'est pas liée au produit scalaire. Prouver sa généralisation suivante. Soit E espace vectoriel qui a une base algébrique dénombrable. Alors, quelle que soit la norme sur E, E n'est pas complet.

Exercice # 25. Soit X l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions de la forme $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{iwt} \in \mathbb{C}$ où w parcourt $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in X$, soit

$$< f, g >:= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

a) Montrer que $< , >$ définit un produit scalaire sur X.

b) Vérifier que la famille $(t \mapsto e^{iwt})_{w\in\mathbb{R}}$ est orthonormée.

c) X est-il un espace de Hilbert ?

Exercice # 26. Soit V un sous-espace de H. Montrer que toute forme linéaire et continue sur V se prolonge en une forme linéaire et continue sur H.

Exercice # 27. Montrer que tout convexe fermé non-vide de H admet un unique élément de norme minimale.

Exercice # 28. Donner un exemple de partie A fermée de ℓ^2, telle que $\mathrm{dist}(0, A) = 1$, mais ne contenant pas d'élément a vérifiant $\|a\|_2 = 1$.

Exercice # 29. Soit $F \subset H$ un sous-espace fermé *non-nul*. Soit P une projection de H sur F (c'est-à-dire : P est un endomorphisme de H, $P \circ P = P$ et $P(H) = F$).

Montrer l'équivalence entre

1. P est la projection orthogonale sur F.
2. P est continu et $\|P\| = 1$.
3. $|\langle P(x), x\rangle| \leq \|x\|^2$ pour tout $x \in H$.

Exercice # 30. (Polynômes de Laguerre) Soit μ la mesure sur $[0, \infty[$ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue (c'est-à-dire $\mu(B) = \int_B e^{-x}dx$, $\forall\, B \in \mathscr{B}_{[0,\infty[}$). Les *polynômes de Laguerre* sont définis par

$$L_n = \frac{e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^n), \forall\, n \geq 0.$$

Montrer que les L_n est un polynôme, $\forall\, n \geq 0$, et que $(L_n)_{n\geq 0}$ est une suite orthonormée de $L^2([0, \infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \mu)$.

Exercice # 31. (Deux identités généralisées du parallélogramme) Soient $x_1, \ldots, x_n \in H$.

a) Montrer que

$$\|tx_1 + (1-t)x_2\|^2 + t(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 = t\|x_1\|^2 + (1-t)\|x_2\|^2,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

b) Montrer que

$$\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

c) Montrer que, si $p \neq 2$, alors il n'existe pas d'isomorphisme linéaire entre ℓ^p et ℓ^2. (Supposer par l'absurde qu'il existe un tel isomorphisme $T : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ et considérer $x_i = T(e_i)$.)

Exercice # 32. Soit $H = L^2(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$. Soit $C = \{f \in H\,;\, f \geq 0\}$. Montrer que C est un convexe fermé et que $P_C(f) = f\chi_{\{f \geq 0\}}$, $\forall\, f \in H$.

Exercice # 33. (Adjoint) Soit $u \in \mathscr{L}(H)$.

a) Montrer que, pour tout $x \in H$, il existe un unique $z \in H$ tel que

$$< u(y), x >=< y, z >,\ \forall\, y \in H.$$

b) Montrer que $H \ni x \mapsto u^*(x) \coloneqq z \in H$ est linéaire.

c) Montrer que u^* est continu, et que $|||u^*||| = |||u|||$.

d) Montrer que $(u^*)^* = u$.

Exercice # 34. (Un cas facile du théorème de Radon-Nikodým-Lebesgue) Soit h une fonction mesurable telle que $0 \leq h \leq 1$. Si μ est une mesure finie sur $(X, \mathscr{T})$, alors $\mathscr{T} \ni A \mapsto \nu(A) \coloneqq \int_A h$ est une mesure finie sur $(X, \mathscr{T})$, telle que $\nu(A) \leq \mu(A)$, $\forall\, A \in \mathscr{T}$. (Voir l'exercice # 33 de la feuille d'exercices # 3.) Dans cet exercice, nous établissons la réciproque de cette propriété, avec une preuve due à Neumann János Lajos, plus connu sous le nom de John von Neumann. Cette réciproque est un cas particulier du théorème de Radon-Nikodým-Lebesgue, traité en toute généralité dans les exercices # 54 et # 56 de la feuilles d'exercices de synthèse et avancés.

Soient ν, μ mesures finies sur $(X, \mathscr{T})$ avec la propriété $\nu(A) \leq \mu(A)$, $\forall\, A \in \mathscr{T}$.

a) Si f est mesurable positive, montrer que $\int f\, d\nu \leq \int f\, d\mu$.

b) Montrer que l'application $\varphi : L^2(X, \mathscr{T}, \mu) \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) \coloneqq \int f\, d\nu$, est bien définie, linéaire et continue.

c) Montrer qu'il existe $k \in \mathscr{L}^2(X, \mathscr{T}, \mu)$ telle que $\varphi([g]) = \int gk\, d\mu$, $\forall\, g \in \mathscr{L}^2(X, \mathscr{T}, \mu)$.

d) Montrer que l'on a $0 \leq k \leq 1$ μ-p. p. Indication : calculer $\varphi([\chi_A])$ et $\varphi([\chi_b])$, où $A \coloneqq \{x \in X\,;\, k(x) < 0\}$ et $B \coloneqq \{x \in X\,;\, k(x) > 1\}$.

e) Conclure.

Exercice # 35. Soit $u \in \mathscr{L}(H)$. Montrer l'équivalence entre

1. u est une isométrie, c'est à dire $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$.
2. Pour tout $x, y \in H$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. $u^*u = \mathrm{Id}$.

Indication : penser à l'identité de polarisation.

Exercice # 36. Si H est *séparable*, montrer que tout ensemble orthonormé $E \subset H$ est au plus dénombrable. Indication : si G est dénombrable et dense, construire une injection de E dans G en considérant des boules de rayon $1/2$.

Exercice # 37. a) Soient $x, y \in E$ tels que $\langle x, y\rangle = \|x\|^2 = \|y\|^2$. Montrer que $x = y$.

b) Soient (x_n) et (y_n) deux suites de E vérifiant $\|x_n\| \leq 1$ et $\|y_n\| \leq 1$, $\forall\, n$.

1. On suppose que $\langle x_n, y_n \rangle \to 1$. Montrer que $x_n - y_n \to 0$.
2. On suppose que $\|x_n + y_n\| \to 2$. Montrer que $x_n - y_n \to 0$.

Exercice # 38. (Matrices d'applications linéaires et continues) Pour simplifier, l'exercice qui suit est écrit pour des applications $T \in \mathscr{L}(\ell^2)$, mais on peut adapter la démarche à des applications $T \in \mathscr{L}(H)$, avec H de dimension infinie et séparable.

Soit $(e^n)_{n\geq 0}$ la base canonique de ℓ^2. Si $T : \ell^2 \to \ell^2$ est linéaire (mais pas nécessairement continu), nous associons à T la matrice $A = (a_{ij})_{i,j\geq 0}$ (avec une infinité de lignes et colonnes) dont les colonnes sont $T(e^0)$, $T(e^1)$, etc.

a) Soit A_n (avec $n \geq 0$) la sous-matrice $(a_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$. Nous munissons $\mathbb{R}^{n+1}$ du produit scalaire standard. Soit $T_n \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A_n. Si T est continue, montrer que $|||T_n|||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^{n+1})} \leq |||T|||_{\mathscr{L}(\ell^2)}$, et donc en particulier la suite $(\|T_n\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^{n+1})})_{n\geq 0}$ est bornée.
b) Réciproquement, si la suite $(\|T_n\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^{n+1})})_{n\geq 0}$ est bornée, montrer que T est continu.

Exercice # 39. Soient *H séparable*, $(e_n)_{n\geq 0} \subset H$ une base hilbertienne et $(f_n)_{n\geq 0} \subset H$ une suite orthonormée. On suppose que

$$\sum_{n\geq 0} \|e_n - f_n\|^2 < \infty.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ est également une base hilbertienne.

a) Soient $N \geq 0$ et $g \in H$ tel que $f_n \perp g$ pour tout $n \geq N$. Montrer l'inégalité

$$\left\| \sum_{n\geq N} \langle g, e_n \rangle e_n \right\|^2 \leq \|g\|^2 \sum_{n\geq N} \|e_n - f_n\|^2.$$

On choisit maintenant un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n\geq N} \|e_n - f_n\|^2 < 1.$$

b) Montrer que tout vecteur g orthogonal à $e_0, e_1, \ldots, e_{N-1}, f_N, f_{N+1}, \ldots$, est nul.
c) On considère les vecteurs

$$\eta_n = e_n - \sum_{k\geq N} < e_n, f_k f_k, \ \forall\, n < N.$$

Montrer que tout vecteur g orthogonal à $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{N-1}, f_N, f_{N+1}, \ldots$, est nul.
d) Soit W l'orthogonal de l'espace V engendré par les vecteurs $f_N, f_{N+1}, \ldots$ Montrer que $\eta_n \in W$ pour tout $n < N$ et que W est engendré par $\eta_0, \ldots, \eta_{N-1}$.

e) Conclure.

Exercice # 40. Soient $(e_n)_{n\geq 0}$ une suite orthonormée de H et $A := \{e_n\,;\, n \geq 0\}$.

a) Montrer que A est fermé et borné. A est-il compact ?

b) Soit (α_n) une suite de réels positifs de carrés sommables. On note K l'ensemble des éléments $x \in H$ qui s'écrivent sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ où $|a_n| \leq \alpha_n$ pour tout n. Montrer que l'ensemble K est compact.

Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle — Année 2026–2027

Feuille de TD # 9

Séries de Fourier

Notations, cadre

a) Si $f :]0, 2\pi[\to \mathbb{C}$ est Lebesgue intégrable, nous posons

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath n x}\, dx,\ \forall\, n \in \mathbb{Z},$$
$$S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{\imath n x},\ \forall\, N \in \mathbb{N},$$
$$Sf(x) := \lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) \text{ (si cette limite existe)},$$
$$T_N(f)(x) := \frac{S_0(f)(x) + \cdots + S_N(f)(x)}{N+1},\ \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

b) La série *formelle* $Sf = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n \cdot} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e_n$ est le *développement en série de Fourier* (ou la *série de Fourier*) de f.[†]

c) Les espaces et normes L^p sont considérés par rapport à $I =]0, 2\pi]$ muni de la mesure $1/(2\pi)\, \lambda_1$, avec λ_1 la mesure de Lebesgue.

Exercice # 1. a) Montrer que $\langle f, g\rangle := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g}(x)\, dx$ définit un produit scalaire sur L^2.

b) Posons $e_n(x) := e^{\imath n x}, \forall\, n \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in]0, 2\pi[$. Montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.

c) Exprimer $c_n(f)$ à l'aide de e_n et du produit scalaire ci-dessus, et retrouver l'inégalité de Bessel.

Exercice # 2. Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$. Alors :

a) f est intégrable sur tout intervalle borné.

b) $\int_0^{2\pi} f(y)\, dy = \int_a^{a+2\pi} f(y)\, dy$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

[†]Notons que, tout comme écrire $\int f$ ne garantit en rien l'existence de l'intégrale, écrire $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e_n$ ne garantit en rien une quelconque convergence de la somme. Tout comme écrire une phrase correcte grammaticalement ne lui garantit pas un sens. ''[...] the notion ''grammatical'' cannot be identified with ''meaningful'' or ''significant'' in any semantic sense.'' Noam Chomsky, Syntactic Structures (1957)

Exercice # 3. Soit $P = \sum_{n\in I} a_n\, e^{in\cdot} = \sum_{n\in I} a_n\, e_n$ (avec $I \subset \mathbb{Z}$ fini) un *polynôme trigonométrique*. Montrer que $P \in L^1$ et que $c_n(P) = \begin{cases} a_n, & \text{si } n \in I \\ 0, & \text{si } n \notin I \end{cases}$.

Exercice # 4. Si f est localement intégrable et 2π-périodique, montrer que $c_n(f(\cdot + h)) = e^{inh} c_n(f)$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Exercice # 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{pour } x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{pour } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}.$$

a) Dessiner le graphe f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
b) Déterminer Sf.
c) Calculer, en fonction de $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$.

Exercice # 6. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique donnée par $f(x) := x$ pour $x \in [0, 2\pi[$. Que donne l'égalité de Parseval ?

Exercice # 7. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) := |\sin x|$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

Exercice # 8. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) := |x|$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice # 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) := x^2$.

a) Déterminer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
b) En déduire les valeurs des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice # 10. Soit $\alpha \in]0, \pi[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-\alpha, \alpha] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Dessiner le graphe f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
b) Calculer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
c) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2}$.

Exercice # 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire et telle que $f(x) = (\pi - x)/2$ sur $]0, \pi]$.

a) Dessiner le graphe de f sur une période.

b) Calculer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la valeur des sommes suivantes : $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice # 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, paire et telle que $f(x) = 2x - \pi$ sur $[0, \pi]$.

a) Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$ et exprimer $f(x)$ sur $[\pi, 2\pi]$.

b) Déterminer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice # 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et vérifiant $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi[$.

a) Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Déterminer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice # 14. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique impaire définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$. En déduire les valeurs des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

Exercice # 15. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$.

a) Exprimer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, et calculer $c_0(f')$.

b) En déduire que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt.$$

c) Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice # 16. La conclusion de l'item 3 de cet exercice suit du corollaire 12.25 du cours, mais le but ici est d'en obtenir un preuves plus directe et élémentaire.

a) Soit $f \in C^k(\mathbb{R})$ une fonction 2π-périodique. Montrer que $|c_n(f)| \leq \frac{\left\|f^{(k)}\right\|_\infty}{|n|^k}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^*$.

En particulier, si $f \in C^2$, montrer que sa série de Fourier $x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{inx}$ converge normalement, et que la somme de la série est f.

b) Dans cet item, nous améliorons la conclusion de l'item a). Nous supposons $f \in C^{k-1}(\mathbb{R})$, f 2π-périodique, et $f^{(k-1)}$ de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$. Montrer que $\sum |n|^{2k} |c_n(f)|^2$ converge.

c) Si f est continue, 2π-périodique, et de classe C^1 par morceaux, montrer que sa série de Fourier converge normalement vers f.

Exercice # 17. (Noyau de Dirichlet) Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$. Soit

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} e^{\imath kx}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,;$$

D_N est le *noyau de Dirichlet*.

a) Montrer que

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)\, D_N(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, D_N(y)\, dy, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

b) Montrer que

$$\begin{aligned} D_N(y) &= \begin{cases} \dfrac{\sin((N+1/2)y)}{\sin(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2N+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sin(Ny)\ \operatorname{cotan}(y/2) + \cos(Ny), & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2N+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

c) Montrer que $\int_0^{\pi} D_N(y)\, dy = \int_{-\pi}^{0} D_N(y)\, dy = \pi$.

Exercice # 18. (Noyau de Fejér) Soit

$$F_N := \frac{D_0 + D_1 + \cdots + D_N}{N+1}, \ \forall\, N \in \mathbb{N},$$

où D_j est le noyau de Dirichlet (F_N est le *noyau de Fejér*). Soit

$$T_N(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_N(f)}{N+1}, \ \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Montrer les propriétés suivantes.

a) Si f est 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$, alors

$$T_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)\, F_N(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, F_N(y)\, dy, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

b) $F_N(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2[(N+1)y/2]}{(N+1)\,\sin^2(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ N+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}$.

En particulier, $F_N(y) \geq 0$, $\forall\, y$, $\forall\, N$.

c) $\int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)\,dy = 2\pi$.

d) Pour tout $0 < \delta < \pi$, $F_N \to 0$ uniformément sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ quand $N \to \infty$.

En particulier, pour tout $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} F_N(y)\,dy \to 0 \text{ quand } N \to \infty.$$

Définition. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et 2π-périodique, son *module de continuité* ω est

$$\omega(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|\,;\, x, y \in \mathbb{R},\, |x - y| \leq \delta\},\ \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi. \tag{1}$$

Exercice # 19. a) Montrer que, dans (1), le $\sup$ est un $\max$.

b) Montrer que ω est continue et croissante.

Exercice # 20. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction α-hölderienne telle que $f(0) = f(2\pi)$. Nous notons encore f son prolongement par 2π-périodicité.

a) Montrer que

$$\omega(\delta) \leq 2\,|f|_{C^\alpha}\delta^\alpha, \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi. \tag{2}$$

b) Améliorer (2) à $\omega(\delta) \leq 2^{1-\alpha}\,|f|_{C^\alpha}\delta^\alpha, \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi$.

Exercice # 21. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $\omega(\delta) \ll \delta$ quand $\delta \to 0$. Montrer que f est constante (et réciproquement).

Exercice # 22. Montrer que $S_n(T_n(f)) = T_n(f)$.

Exercice # 23. (Pour une mise en perspective de cet exercice, voir l'exercice # 26.) Montrer que

$$\|S_n(f)\|_\infty \leq \|D_n\|_1 \|f\|_\infty,\ \forall\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable, bornée, } 2\pi\text{-périodique.}$$

Exercice # 24.

a) Montrer que

$$|D_n(y)| \leq \frac{\pi}{|y|} \min\left((n + 1/2)|y|, 1\right),\ \forall\, n \geq 0,\ \forall\, 0 < |y| \leq \pi.$$

On pourra utiliser les inégalités suivantes :

$$|\sin t| \leq \min\left(|t|, 1\right), \forall\, t \in \mathbb{R},\ \sin t \geq \frac{2}{\pi}t,\ \forall\, t \in [0, \pi/2].$$

b) En déduire que

$$\|D_n\|_1 \leq 1 + \ln \pi + \ln(n + 1/2), \ \forall\, n \geq 0.$$

Exercice # 25. Montrer que

$$|F_n(y)| \leq \frac{\pi^2}{(n+1)y^2} \min\left(((n+1)y/2)^2, 1\right), \ \forall\, n \geq 0, \ \forall\, 0 < |y| \leq \pi.$$

Exercice # 26. (Produit de convolution de fonctions périodiques)[†] Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions 2π-périodiques, avec f intégrable sur $]0, 2\pi[$ et g continue. Nous définissons

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t)\, dt, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que le *produit de convolution* $f * g(x)$ est bien défini, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que $f * g$ est 2π-périodique.
c) Calculer les coefficients de Fourier de $x \mapsto f(x-t)$ en fonction de t et de ceux de f.
d) En déduire les coefficients de Fourier de $f * g$ en fonction de ceux de f et g.
e) Généraliser ce qui précède au cas où $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$, avec p et q conjugués.

Exercice # 27.

a) Montrer que $T_N(f) = f * F_N$, $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$, $\forall\, f \in \mathscr{L}^p(I)$, f 2π-périodique.
b) Avec p et f comme dans la question précédente, montrer que $T_N(f)$ est 2π-périodique, $T_N(f) \in \mathscr{L}^p(I)$ et $\|T_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$.
c) Soit $1 \leq p < \infty$. Si $f \in C_c^\infty(I)$ et f est prolongée par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$, montrer que $\|T_N(f) - f\|_p \to 0$ quand $N \to \infty$. Indication : utiliser le théorème de Fejér.
d) Soit $1 \leq p < \infty$. Si $f \in \mathscr{L}^p(I)$ et f est 2π-périodique, montrer que $\|T_N(f) - f\|_p \to 0$ quand $N \to \infty$. Indication : utiliser la question précédente et la densité de $C_c^\infty(I)$ dans $\mathscr{L}^p(I)$.
e) Calculer $c_n(T_N(f))$, $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
f) En déduire que « les coefficients de Fourier d'une fonction déterminent la fonction » : si $f \in L^1(I)$ et f est 2π-périodique, alors $[c_n(f) = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}] \implies f = 0$.

Exercice # 28. (Série de Fourier d'une mesure périodique) Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que : (i) $\mu([0, 2\pi[) < \infty$; (ii) $\mu(2\pi + A) = \mu(A)$, $\forall\, A \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$. Nous définissons

$$c_n(\mu) := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} e^{-\imath n x}\, d\mu(x), \ \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

[†]Bien que la terminologie « produit de convolution » et la notation $f * g$ soient les mêmes que dans le chapitre 11, le cadre de cet exercice n'est pas le même, et on ne peut pas invoquer les résultats du chapitre 11.

a) Montrer qu'un exemple de telle mesure est $\mu(A) \coloneqq \int_A f$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction 2π-périodique et intégrable sur $[0, 2\pi[$.
b) Montrer qu'un autre exemple de telle mesure est le peigne de Dirac $\text{Ш}(A) \coloneqq \#(A \cap 2\pi\mathbb{Z})$.
c) Calculer $c_n(\text{Ш})$, avec Ш le peigne de Dirac.
d) Proposer la définition de $T_N(\mu)$.
e) Montrer que $T_N(\mu)$ est une fonction continue et 2π-périodique telle que

$$\int_A T_N(\mu) \to \mu(A), \ \forall\, A \in \mathscr{B}_{[0,2\pi[}.$$

Exercice # 29. (Produit de convolution d'une fonction et d'une mesure périodiques) Soit f borélienne, respectivement μ, comme dans l'exercice # 27, respectivement # 28. Posons

$$f * \mu(x) \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[}$$

a) Reprendre du théorème 11.3 pour $q = 1$ et montrer que $f * \mu \in \mathscr{L}^p$.
b) Montrer que $c_n(f * \mu) = c_n(f)c_n(\mu)$

Exercice # 30. (Inégalités faibles de Bernstein (I)) Commençons par la fin de l'histoire, qui dépasse le cadre de cet enseignement. En général, l'ordre de grandeur d'une fonction ne donne aucune information sur l'ordre de grandeur de sa dérivée. Par exemple, les fonctions $x \mapsto f_n(x) := \sin(nx)$ satisfont toutes $|f_n| \leq 1$, mais leurs dérivées peuvent être arbitrairement grandes quand $n \to \infty$. Le *théorème de Bernstein* donne une inégalité entre f' et f *si f est un polynôme trigonométrique de degré fixé*. Il affirme que, si f est un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$, alors

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq n \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|. \tag{3}$$

Nous allons montrer une forme plus faible, avec un facteur supplémentaire 3, de cette inégalité, et une version L^p de celle-ci :

$$\|f'\|_p \leq 3n \|f\|_p, \ \forall\, 1 \leq p \leq \infty, \ \forall \text{ polynôme trigonométrique } f \text{ de degré } \leq n. \tag{4}$$

a) Soit $g(x) := e^{\imath nx} f(x)$. Si f est un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$, montrer l'identité suivante (avec F_n le polynôme de Fejér, et T_n comme dans l'exercice précédent) :

$$f'(x) = \imath n f(x) - 2\imath n e^{-\imath nx} (g * F_n)(x) = \imath n f(x) - 2\imath n e^{-\imath nx} (T_n(g))(x), \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

b) En déduire (4).

Pour la suite de cet exercice (inégalités faibles de Bernstein (II)), voir l'exercice # 59 de la feuille d'exercices de synthèse et avancés.