Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2007-2008

Devoir maison

Notations. $R =]0, l_1[\times]0, l_2[\subset \mathbb{R}^2$.
Le point de $\mathbb{R}^2$ sera noté (x_1, x_2) ou x, celui de $\mathbb{R}^3$ (x_1, x_2, t) ou (x, t).

On se propose de résoudre le problème de Cauchy

$$(P) \begin{cases} (E_1)\ u_{tt} - \Delta_x u = 0 & \text{dans } R\times]0, +\infty[\\ (E_2)\ u(x, t) = 0 & \text{si } t \geq 0 \text{ et } x \in \partial R \\ (E_3)\ u_{|t=0} = g & \text{sur } R \\ (E_4)\ u_{t|t=0} = 0. & \end{cases}.$$

On cherche une solution $u \in C(\overline{R}\times\mathbb{R}_+)\cap C^2(\overline{R}\times R_+^*)$. De plus, on demande $u_t \in C(\overline{R}\times\mathbb{R}_+)$.

On suppose satisfaites les conditions de compatibilité :
(C1) $g \in C(\overline{R})$;
(C2) $g(x) = 0$ si $x \in \partial R$.

a) Trouver des solutions particulières de (E_1)+(E_2)+(E_4) de la forme $\Phi(t)\Psi_1(x_1)\Psi_2(x_2)$.

b) Montrer que la solution espérée de (P) est de la forme

$$u(x, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} \cos(\mu_{m,n} t) \sin \frac{m\pi x_1}{l_1} \sin \frac{n\pi x_2}{l_2}.$$

On précisera les valeurs des $\mu_{m,n}$ et on calculera $a_{m,n}$ en fonction de g.

c) Montrer que la formule ci-dessus donne la solution de (P) si $g \in C_0^\infty(R)$ (c'est-à-dire si $g \in C^\infty$ et g s'annule en dehors d'un compact contenu dans R).

d) Idem si g est la restriction à $\overline{R}$ d'une fonction h de classe $C^4(\mathbb{R})$, impaire, $(l_1, 0)$ et $(0, l_2)$-périodique.

e) Montrer que, si $u \in C^1(\overline{R} \times \mathbb{R}_+)$ est solution de (P), alors, pour $t \geq 0$, on a

$$\int_R |\nabla_x u(x, t)|^2 \, dx \leq \int_R |\nabla g(x)|^2 \, dx.$$

Indication pour la question e) : multiplier (E_1) par une fonction convenable, puis intégrer par parties.