Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2007-2008

Corrigé du devoir maison

Attention ! Il y avait une erreur d'énoncé : l'énoncé de la question d) est incorrect. Énoncé corrigé :

d) Montrer que la formule ci-dessus donne la solution de (P) si g est la restriction à $\overline{R}$ d'une fonction h de classe $C^6(\mathbb{R}^2)$
• impaire en x_1 et impaire en x_2 ;
• $(2l_1, 0)$ et $(0, 2l_2)$-périodique.

a) Une solution est la solution nulle. On cherche les solutions non nulles.
Avec l'abus habituel qui veut que $\Longrightarrow$ est une implication à la physicienne, on a

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0 \Longrightarrow \frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{\Psi_1''}{\Psi_1} + \frac{\Psi_2''}{\Psi_2} \Longrightarrow \frac{\Psi_j''}{\Psi_j} = -c_j, j = 1, 2 \text{ et } \frac{\Phi''}{\Phi} = -c_1 - c_2.$$

De (E_2), on a soit $\Psi_1\Psi_2 = 0$ sur ∂R, soit $\Phi \equiv 0$. La deuxième possibilité ne convenant pas, on trouve $\Psi_1\Psi_2 = 0$ sur ∂R. Si $\Psi_1(0) \neq 0$, alors on doit avoir $\Psi_2 \equiv 0$, ce qui ne convient pas. On doit donc avoir $\Psi_1(0) = 0$. De même, $\Psi_1(l_1) = 0$, $\Psi_2(0) = \Psi_2(l_2) = 0$.
On trouve que Ψ_j est solution de $\begin{cases} -\Psi_j'' = c_j\Psi_j & \text{dans } [0, l_j] \\ \Psi_j(0) = \Psi_j(l_j) = 0 \end{cases}$. En multipliant cette équation par Ψ_j et en intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^{l_j} (\Psi_j')^2(x_j)\, dx_j = c_j \int_0^{l_j} (\Psi_j)^2(x_j)\, dx_j,$$

d'où $c_j \geq 0$. Si $c_j = 0$, on trouve Ψ_j constante. La condition $\Psi_j(0) = 0$ implique $\Psi_j \equiv 0$, ce qui ne convient pas. Donc $c_j > 0$, ce qui donne $c_j = \lambda_j^2$ pour un $\lambda_j > 0$.
On trouve $\Psi_j(x_j) = a_j \sin(\lambda_j x_j) + b_j \cos(\lambda_j x_j)$. La condition $\Psi_j(0) = 0$ donne $b_j = 0$. La condition $\Psi_j(l_j) = 0$ couplée avec $a_j \neq 0$ (sinon $\Psi_j \equiv 0$) donne $\sin(\lambda_j l_j) = 0$, d'où $\lambda_j = \dfrac{k_j\pi}{l_j}$ pour un $k_j \in \mathbb{N}^*$.
Il s'ensuit que $\Psi_1\Psi_2 = a \sin(k_1\pi x_1/l_1)\sin(k_2\pi x_2/l_2)$ pour un $a \neq 0$ et $k_j \in \mathbb{N}^*$, $j = 1, 2$.
Le problème satisfait par Φ est alors $\begin{cases} -\Phi'' = ((k_1\pi/l_1)^2 + (k_2\pi/l_2)^2)\Phi & \text{dans } \mathbb{R}_+ \\ \Phi'(0) = 0 \end{cases}$. Ceci donne $\Phi(t) = b\cos(\sqrt{(k_1\pi/l_1)^2 + (k_2\pi/l_2)^2}t)$, avec $b \neq 0$.
Finalement, toutes les solutions recherchées sont de la forme

$$\boxed{c\cos(\mu_{m,n}t)\sin(m\pi x_1/l_1)\sin(n\pi x_2/l_2)}$$

avec :
• $m, n \in \mathbb{N}^*$;
• les $\mu_{m,n}$ donnés par la formule (F) $\mu_{m,n} := \sqrt{(m\pi/l_1)^2 + (n\pi/l_2)^2}$.

b) Si la séparation des variables marche, alors la solution est une superposition de solutions à variables séparées trouvées ci-dessus, c'est-à-dire

$$(1) \qquad u(x, t) = \sum a_{m,n}\cos(\mu_{m,n}t)\sin(m\pi x_1/l_1)\sin(n\pi x_2/l_2),$$

avec les $\mu_{m,n}$ donnés par (F). On devine les $a_{m,n}$ à partir du calcul d'ingénieur suivant

$$\begin{aligned}\int_R g(x)\prod_{j=1}^2 \sin(k_j\pi x_j/l_j)\,dx = &\int_R u(x,0)\prod_{j=1}^2 \sin(k_j\pi x_j/l_j)\,dx\\ =&\int_R \sum_{m,n\in\mathbb{N}^*} a_{m,n}\sin(m\pi x_1/l_1)\sin(n\pi x_2/l_2)\prod_{j=1}^2 \sin(k_j\pi x_j/l_j)\,dx\\ =&\sum_{m,n\in\mathbb{N}^*} a_{m,n}\int_R \sin(m\pi x_1/l_1)\sin(n\pi x_2/l_2)\prod_{j=1}^2 \sin(k_j\pi x_j/l_j)\,dx\\ =&\frac{l_1l_2}{4}a_{k_1,k_2}.\end{aligned}$$

On s'attend donc à ce que la solution soit donnée par

$$(2)\quad \boxed{\begin{aligned}&u(x,t)=\begin{cases} g(x), & \text{si } t=0\\ \sum_{m,n\in\mathbb{N}^*} a_{m,n}\cos(\mu_{m,n}t)\sin(m\pi x_1/l_1)\sin(n\pi x_2/l_2), & \text{si } t>0\end{cases}\\ &\text{avec}\\ &\mu_{m,n}:=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2},\quad a_{m,n}:=\frac{4}{l_1l_2}\int_R g(x)\sin(m\pi x_1/l_1)\sin(n\pi x_2/l_2)\,dx\end{aligned}}$$

Réponse aux questions c) et d). Elle s'obtient en combinant les Lemmes 1 à 5 ci-dessous.

Lemme 1. *Les séries* $S_1 := \sum_{m,n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{m^2n^2}$ *et* $S_2 := \sum_{m,n\in\mathbb{N}^*}\frac{m^2+n^2}{m^6+n^6}$ *convergent.*

Démonstration. La sommation par paquets (=théorème de Tonnelli pour les séries à termes positifs) donne

$$S_1=\sum_{m=1}^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{m^2n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^4}{36}<\infty.$$

Pour montrer la convergence de S_2, il suffit d'obtenir une majoration de la forme $\frac{m^2+n^2}{m^6+n^6}\le\frac{C}{m^2n^2}$. Avec $s:=\frac{m^2}{n^2}>0$, on doit trouver C tel que $C(s^3+1)\ge s^2+s$. On peut :

- soit remarquer que $C=1$ convient (étudier, pour $s>0$, la fonction $s\mapsto s^3-s^2-s+1$) ;
- soit établir l'existence de C via le fait que C convient si et seulement si $\frac{s+s^2}{s^3+1}\le C$. Il suffit alors de remarquer que la fonction $s\mapsto\frac{s+s^2}{s^3+1}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (elle est continue et sa limite en $+\infty$ est 0). □

Lemme 2. *Soit* $g\in C^6(\overline{R})$ *telle que* (H) $\partial_k^j g=0$ *sur* ∂R, $k=1,2$, $j=0,2,4$. *Alors*

$$a_{m,n}=-\frac{4l_1^6}{l_1l_2\pi^6m^6}\int_R\partial_1^6 g\sin\frac{m\pi x_1}{l_1}\sin\frac{n\pi x_2}{l_2}\,dx=-\frac{4l_2^6}{l_1l_2\pi^6n^6}\int_R\partial_2^6 g\sin\frac{m\pi x_1}{l_1}\sin\frac{n\pi x_2}{l_2}\,dx.$$

En particulier, on a

$$(3)\qquad |a_{m,n}|\le C(m^6+n^6)\|D^6g\|_{L^\infty}.$$

Démonstration. Les identités s'obtiennent par des intégrations par parties répétées. Un exemple de telle intégration :

$$\begin{aligned}
a_{m,n} =& \frac{4}{l_1 l_2}\int_R g(x)\sin(m\pi x_1/l_1)\sin(n\pi x_2/l_2)\,dx\\
=& -\frac{4}{l_1 l_2}\frac{l_1}{m\pi}\int_R g(x)\partial_1[\cos(m\pi x_1/l_1)]\sin(n\pi x_2/l_2)\,dx\\
\overset{(1)}{=}& -\frac{4}{l_1 l_2}\frac{l_1}{m\pi}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} g(x)\partial_1\cos(m\pi x_1/l_1)\,dx_1\sin(n\pi x_2/l_2)\,dx_2\\
\overset{(2)}{=}& \frac{4}{l_1 l_2}\frac{l_1}{m\pi}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1}\partial_1 g(x)\cos(m\pi x_1/l_1)\,dx_1\sin(n\pi x_2/l_2)\,dx_2\\
\overset{(3)}{=}& \frac{4}{l_1 l_2}\frac{l_1}{m\pi}\int_R \partial_1 g(x)\cos(m\pi x_1/l_1)\sin(n\pi x_2/l_2)\,dx.
\end{aligned}$$

Ici, $\overset{(1)}{=}$ et $\overset{(3)}{=}$ repose sur le théorème de Fubini, valide parce qu'on intègre des fonctions continues sur le compact $\overline{R}$. Par ailleurs, $\overset{(2)}{=}$ suit d'une intégration par parties. Celle-ci ne fait pas apparaître de terme de bord car $g(0, x_2) = g(l_1, x_2)$, $\forall\ x_2 \in [0, l_2]$.
Pour obtenir (3), on note que la première identité donne

$$|a_{m,n}| \le \frac{4 l_1^6}{l_1 l_2 \pi^6 m^6}\|\partial_1^6 g\|_{L^\infty}\lambda_2(R) \le \frac{C_1}{m^6}\|D^6 g\|_{L^\infty}\ ;$$

de même, $|a_{m,n}| \le \dfrac{C_2}{n^6}\|D^6 g\|_{L^\infty}$. On trouve $|a_{m,n}| \le \dfrac{C_1 + C_2}{m^6 + n^6}\|D^6 g\|_{L^\infty}$. □

Lemme 3. *Si g est comme dans la question c) ou comme dans la question d), alors g vérifie* (H). *En particulier, les $a_{m,n}$ vérifient (3).*

Démonstration. Si $g \in C_0^\infty(R)$, alors il existe un voisinage ouvert U de ∂R tel que $g \equiv 0$ dans U, d'où toutes les dérivées partielles de g s'annulent dans U, en particulier sur ∂R.
Si g est comme dans d), montrons, par exemple, que, sur ∂R, $\partial_1^j g = 0$, $j = 0, 2, 4$.
D'une part, on a (par imparité en x_2) $g(x_1, 0) \equiv 0$, d'où $\partial_1^j g(x_1, 0) = 0$, $j = 0, \ldots, 6$.
D'autre part, $g(x_1, l_2) = g(x_1, l_2 - 2l_2) = g(x_1, -l_2) = -g(x_1, l_2)$, d'où $g(x_1, l_2) \equiv 0$. On trouve $\partial_1^j g(x_1, l_2) = 0$, $j = 0, \ldots, 6$.
Par ailleurs, on a $-g(-x_1, x_2) \equiv g(x_1, x_2)$, d'où $(-1)^{j+1}\partial_1^j g(-x_1, x_2) \equiv \partial_1^j g(x_1, x_2)$, $j = 0, \ldots, 6$. Pour j pair et $x_1 = 0$, on trouve $\partial_1^j g(0, x_2) \equiv 0$.
Enfin, l'identité $g(x_1, x_2) \equiv -g(2l_1 - x_1, x_2)$ donne, en dérivant j fois par rapport à x_1 ($j = 0, 2, 4$) et en prenant $x_1 = l_1$, que $\partial_1^j g(l_1, x_2) = 0$. □

Lemme 4. *Soit g une fonction vérifiant* (H). *Alors* $g = \displaystyle\sum_{m,n\in\mathbb{N}^*} a_{m,n}\sin(m\pi x_1/l_1)\sin(n\pi x_2/l_2)$.
Autrement dit, u vérifie (E_3).

Démonstration. On a $\dfrac{1}{m^6 + n^6} \le \dfrac{m^2 + n^2}{m^6 + n^6}$. De cette inégalité, de (3) et du Lemme 1, on trouve que la série de l'énoncé est absolument convergente.
Soit $(x_1, x_2) \in \overline{R}$. La fonction $t \mapsto g(t, x_2)$ est C^1 et s'annule en 0 et en l_1. Il s'ensuit que cette fonction est la somme de sa série de Fourier (en sinus). En particulier,

$$g(x_1, x_2) = \sum_{m\in\mathbb{N}^*}\frac{2}{l_1}\sin\frac{m\pi x_1}{l_1}\int_0^{l_1} g(t, x_2)\sin\frac{m\pi t}{l_1}\,dt := \sum_{m\in\mathbb{N}^*}\frac{2}{l_1}\sin\frac{m\pi x_1}{l_1} b_m(x_2).$$

Clairement (c'est le cas trivial du théorème de dérivabilité des intégrales : intégration sur un compact d'une fonction de classe C^k), les fonctions b_m sont de classe C^1 (en fait C^6)

De plus, on a $b_m(0) = b_m(l_2) = 0$, car $g = 0$ sur ∂R. On trouve

$$(4) \qquad b_m(x_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2}{l_2} \sin\frac{n\pi x_2}{l_2} \int_0^{l_2} b_m(s) \sin\frac{n\pi s}{l_2}\, ds \overset{(1)}{=} \frac{l_1}{2} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_{m,n} \sin\frac{n\pi x_2}{l_2} \ ;$$

$\overset{(1)}{=}$ utilise le théorème de Fubini.
En utilisant le fait qu'une série absolument convergente est commutativement convergente, on trouve

$$g(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}^*}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_{m,n} \sin(m\pi x_1/l_1) \sin(n\pi x_2/l_2) = \sum_{m,n\in\mathbb{N}^*} a_{m,n} \sin(m\pi x_1/l_1) \sin(n\pi x_2/l_2).$$

$\square$

Lemme 5. *Sous l'hypothèse* (H), *on a* $u \in C^2(\overline{R} \times \mathbb{R}_+)$ *et* u *vérifie le problème (P).*

Démonstration. Il suffit de montrer que $u \in C^2$ et que les dérivées d'ordre ≤ 2 de u se calculent en dérivant terme par terme. Les autres propriétés découlent de celle-ci par calculs immédiats.
Montrons, par exemple, que $\partial_t^2 u$ existe et est continue. (On suppose déjà montrée l'existence de $\partial_t u$.)
À m, n fixés, la fonction $(t, x_1, x_2) \mapsto \partial_t^2(a_{m,n} \cos(\mu_{m,n} t) \sin(m\pi x_1/l_1) \sin(n\pi x_2/l_2)) := c_{m,n}(x_1, x_2, t)$ étant continue, il suffit de trouver une majoration de la forme $|c_{m,n}(x,t)| \leq d_{m,n}$, avec $\displaystyle\sum_{m,n\in\mathbb{N}^*} d_{m,n} < \infty$. Or, on a

$$|c_{m,n}| \leq |a_{m,n}|\mu_{m,n}^2 = \left(\left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2\right)|a_{m,n}| \leq \pi^2(1/l_1^2 + 1/l_2^2)(m^2+n^2)|a_{m,n}| \overset{(1)}{\leq} \frac{K(m^2+n^2)}{m^6+n^6} \ ;$$

ici, $K := C\pi^2(1/l_1^2 + 1/l_2^2)$, C est la constante de l'inégalité (3) et l'inégalité $\overset{(1)}{\leq}$ découle du Lemme 2. $\square$

e) On multiplie (E_1) par u_t et on intègre sur $R \times [\varepsilon, T]$, avec $0 < \varepsilon < T$. En notant que les théorèmes de Fubini, respectivement de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ s'appliquent sans problème dans les calculs ci-dessous (intégrales de fonctions de classe C^k sur un compact), on trouve

$$\begin{aligned}
0 =& \int_R \int_\varepsilon^T u_{tt} u_t \, dt\, dx - \int_\varepsilon^T \int_R \Delta_x u u_t \, dx\, dt \\
=& \frac{1}{2} \int_R \int_\varepsilon^T (u_t^2)_t \, dt\, dx - \int_\varepsilon^T \int_R \Delta_x u u_t \, dx\, dt = \\
=& \frac{1}{2} \int (u_t)^2(x,T)\, dx - \frac{1}{2} \int (u_t)^2(x,\varepsilon)\, dx - \int^T \int \Delta_x u u_t \, dx\, dt.
\end{aligned}$$

Pour calculer la dernière intégrale, on se sert d'une intégration par parties et de la remarque suivante : comme $u(x,t) \equiv 0$, $x \in \partial R$, on a $u_t(x,t) = 0$, $x \in \partial R$. On trouve :

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^T \int_R \Delta_x u u_t \, dx\, dt &= \sum_{j=1}^2 \int_\varepsilon^T \int_R \partial_j^2 u u_t \, dx\, dt = \sum_{j=1}^2 \int_\varepsilon^T \int_0^{l_{3-j}} \int_0^{l_j} \partial_j^2 u u_t \, dx\, dt \\
&= -\sum_{j=1}^2 \int_\varepsilon^T \int_0^{l_{3-j}} \int_0^{l_j} \partial_j u \partial_j (u_t) \, dx\, dt = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \int_\varepsilon^T \int_R ((\partial_j u)^2)_t \, dx\, dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_\varepsilon^T \int_R (|\nabla_x u|^2)_t \, dx\, dt = -\frac{1}{2} \int_R \int_\varepsilon^T (|\nabla_x u|^2)_t \, dt\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_R |\nabla_x u|^2(x,\varepsilon)\, dx - \frac{1}{2} \int_R |\nabla_x u|^2(x,T)\, dx.
\end{aligned}$$

En combinant les deux identités, on trouve

$$\int_R |\nabla_x u|^2(x,T)\, dx = \int_R |\nabla_x u|^2(x,\varepsilon)\, dx + \int_R (u_t)^2(x,\varepsilon)\, dx - \int_R (u_t)^2(x,T)\, dx.$$

En utilisant le fait que $u \in C^1$ dans $\overline{R} \times \mathbb{R}_+$ et les conditions initiales $u_{|t=0} = g$, $u_{t|t=0} = 0$, on trouve, en faisant $\varepsilon \to 0$ dans l'identité précédente, que

$$\int_R |\nabla_x u|^2(x,T)\, dx = \int_R |\nabla g|^2(x)\, dx - \int_R (u_t)^2(x,T)\, dx \le \int_R |\nabla g|^2(x)\, dx.$$