Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2007-2008

Corrigé du devoir maison no 2

On considère le problème

$$\begin{cases} (1)\ |\nabla u| = \sqrt{2} & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ (2)\ u(x,x^2) = x + x^2 & \\ (3)\ u_x(1,1) = 1 & \end{cases} .$$

Solution par la méthode des caractéristiques
On cherche $u \in C^2$ solution du problème.
De (2), on a $u_x(x,x^2) + 2xu_y(x,x^2) = 1 + 2x$, et de (1), $u_x^2 + u_y^2 = 2$. On trouve (en sortant $a(x) := u_x(x,x^2)$ en fonction de $b(x) := u_y(x,x^2)$ de la première équation et en remplaçant dans la seconde) que pour tout x on a $a(x) = a_1(x)$ et $b(x) = b_1(x)$ ou $a(x) = a_2(x)$ et $b(x) = b_2(x)$, où $a_1(x) = 1$, $b_1(x) = 1$ et $a_2(x) = 1 - 4x\dfrac{2x-1}{1+4x^2}$, $b_2(x) = 1 + 2\dfrac{2x-1}{1+4x^2}$.

Lemme. Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ telles que le système $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ n'ait pas de solution.
Soit $h \in C^1(\mathbb{R})$ telle que, pour tout x, on ait $h(x) = f(x)$ ou $h(x) = g(x)$.
Alors $h \equiv f$ ou $h \equiv g$.

Démonstration. Preuve par l'absurde. Sinon, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $h(x) = f(x) \neq g(x)$ et $h(y) = g(y) \neq f(y)$. Sans perte de généralité, on peut supposer $x < y$. Par continuité de f, g, h il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \neq g$ sur $[x, x+\varepsilon]$ et sur $[y-\varepsilon, y]$. Ainsi, $h = f$ sur $[x, x+\varepsilon]$ et $h = g$ sur $[y-\varepsilon, y]$. Soit

$$z := \sup A, \quad \text{où } A := \{t \geq x\ ;\ h = f \text{ sur } [x,t[\}.$$

Clairement, A est un intervalle de la forme $[x,z[$ ou $[x,z]$, qui est d'intérieur non vide (il contient $[x,x+\varepsilon]$) et contenu dans $[x, y-\varepsilon]$ (d'où $x < z < y$). On a :
• d'une part $h = f$ sur $[x,z[$, d'où $h(z) = f(z)$ et $h'(z) = f'(z)$;
• d'autre part (par définition du sup) il existe une suite $t_n \searrow z$ telle que $h \not\equiv f$ sur $[x, t_n[$, d'où (en prenant $z_n \in [x, t_n[$ tel que $h(z_n) \neq f(z_n)$) il existe une suite $z_n \searrow z$ telle que $h(z_n) = g(z_n)$. Dans un premier temps, ceci donne $h(z) = g(z)$. Ensuite, à partir de la définition de la dérivée, on trouve $h'(z) = g'(z)$.
Contradiction, car on a $f(z) = g(z)$ et $f'(z) = g'(z)$. □

Le lemme s'applique à $f := b_1$ et $g := b_2$, car la seule solution de $b_1(x) = b_2(x)$ est $x = 1/2$ et on vérifie aisément que $b_1'(1/2) \neq b_2'(1/2)$. Ainsi, on a soit $u_x(x,x^2) \equiv a_1(x)$ et $u_y(x,x^2) \equiv b_1(x)$, soit $u_x(x,x^2) \equiv a_2(x)$ et $u_y(x,x^2) \equiv b_2(x)$. La condition (3) nous assure que $u_x(x,x^2) = 1$ et $u_y(x,x^2) = 1$.

Le système des caractéristiques est donc

$$\begin{cases} \dot{x}= 2p & x(0) = x_0 \\ \dot{y}= 2q & y(0) = x_0^2 \\ \dot{z}= 2(p^2+q^2) = 4 & z(0) = x_0 + x_0^2 \\ \dot{p}= 0 & p(0) = 1 \\ \dot{q}= 0 & q(0) = 1 \end{cases}$$

d'où $u(x_0 + 2t, x_0^2 + 2t) = x_0 + x_0^2 + 4t$. Plutôt que d'essayer d'inverser cette formule (=d'exprimer x_0 et t en fonction de x et y), il vaut mieux remarquer qu'elle revient à $u(x,y) = x + y$, qui vérifie d'ailleurs le problème de départ.

Solution par développements en séries

On fait le changements de variables et fonctions $\begin{cases} X = x \\ Y = x^2 - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = X \\ y = X^2 - Y \end{cases}$ et $v(X,Y) = u(x,y) \iff u(x,y) = v(x, x^2 - y) \iff v(X,Y) = u(X, X^2 - Y)$.
Compte tenu du fait que $u_x(x,x^2) = u_y(x,x^2) = 1$, on trouve que le problème initial devient

$$\begin{cases} (1')\ (v_x + 2xv_y)^2 + v_y^2 = 2 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ (2')\ v(x,0) = x + x^2 \\ (3')\ v_y(x,0) = -1 \end{cases}.$$

En cherchant, au voisinage de l'origine, v sous la forme $v = \sum a_{m,n} x^m y^n$, on trouve

$$\begin{cases} (1'') \displaystyle\sum_{p,q} \Big(\sum_{0\le m\le p,\, 0\le n\le q} (m+1)a_{m+1,n}(p-m+1)a_{p-m+1,q-n} \\ \qquad +4 \displaystyle\sum_{1\le m\le p-1,\, 0\le n\le q} (n+1)a_{m-1,n+1}(q-n+1)a_{p-m-1,q-n+1} \\ \qquad +4 \displaystyle\sum_{0\le m\le p-1,\, 0\le n\le q} (m+1)a_{m+1,n}(q-n+1)a_{p-m-1,q-n+1} \\ \qquad + \displaystyle\sum_{0\le m\le p,\, 0\le n\le q} (n+1)a_{m,n+1}(q-n+1)a_{p-m,q-n+1} \Big) x^p y^q = 2 \\ (2'') \qquad \sum a_{m,0}x^m = x + x^2 \\ (3'') \qquad \sum a_{m,1}x^m = -1 \end{cases}$$

Les conditions $(2'')$ et $(3'')$ donnent respectivement

$$(B) \quad a_{0,0} = 0,\ a_{1,0} = 1,\ a_{2,0} = 1, a_{m,0} = 0 \text{ si } m \ge 2$$

$$(C) \quad a_{0,1} = -1,\ a_{m,1} = 0 \text{ si } m \ge 1.$$

Pour exploiter $(1'')$, on regroupe en puissances de y. Pour $q = 0$, l'équation obtenue est satisfaite (on a choisi $u_y(x,x^2)$ pour ça). Pour $q = 1$, on trouve

$$\begin{aligned} (A_{p,1})\ 2 &\sum_{0\le m\le p} (m+1)(p-m+1)a_{m+1,0}a_{p-m+1,1} + 16 \sum_{1\le m\le p-1} a_{m-1,1}a_{p-m-1,2} \\ &+ 8 \sum_{0\le m\le p-1} (m+1)a_{m+1,0}a_{p-m-1,2} + 4 \sum_{0\le m\le p-1} (m+1)a_{m+1,1}a_{p-m-1,1} \\ &+ 4 \sum a_{m,1}a_{p-m,2} = 0, \quad \forall\ p. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on trouve :
• pour $p=0$, que $a_{0,2}=0$;
• pour $p=1$, que $a_{1,2}=0$;
• puis, par récurrence sur p, que $a_{p,2}=0$.
Comment mener à bien la récurrence : Dans $(A_{p,1})$, on note que, si $p\geq 2$, alors la première somme est nulle. En effet, $a_{k,0}a_{l,1}$ est non nul seulement si $l=0$ et $k=1$ ou 2. Ce qui force $k+l\leq 2$. Or, dans la somme en question, le terme qui apparaît est $a_{m+1,0}a_{p-m+1,1}$, et on a $m+1+(p-m+1)>2$.
Dans la deuxième somme, on voit $a_{j,2}$ avec $j\leq p-1$, et ces coefficients sont nuls (hypothèse de récurrence sur p). Idem pour la troisième somme. Idem pour la dernière, sauf en ce qui concerne le terme $4a_{0,1}a_{p,2}$. Enfin, l'avant dernière somme est nulle, car $a_{k,1}a_{l,1}$ est non nul seulement si $k+l=0$. Or, $m+1+(p-m-1)>0$.
Finalement, par hypothèse de récurrence, $(A_{p,1})$ devient $0=4a_{0,1}a_{p,2}=-4a_{p,2}$, d'où $a_{p,2}=0$.

On montre maintenant que $a_{p,q+1}$ si $q\geq 1$. Pour $q=1$ c'est vrai. Si $q\geq 2$, ceci s'obtient en examinant

$$\begin{aligned}(A_{p,q})\quad & \sum_{0\leq m\leq p,\, 0\leq n\leq q}(m+1)a_{m+1,n}(p-m+1)a_{p-m+1,q-n}\\ & +4\sum_{1\leq m\leq p-1,\, 0\leq n\leq q}(n+1)a_{m-1,n+1}(q-n+1)a_{p-m-1,q-n+1}\\ & +4\sum_{0\leq m\leq p-1,\, 0\leq n\leq q}(m+1)a_{m+1,n}(q-n+1)a_{p-m-1,q-n+1}\\ & +\sum_{0\leq m\leq p,\, 0\leq n\leq q}(n+1)a_{m,n+1}(q-n+1)a_{p-m,q-n+1}=0,\quad \forall\, p, \forall\, q\geq 2.\end{aligned}$$

La première somme de $(A_{p,q})$ est nulle.En effet, si $n\geq 2$ ou si $q-n\geq 2$, alors les coefficients $a_{m+1,n}$ (ou $a_{p-m+1,q-n}$) sont nuls (c'est l'hypothèse de récurrence). Il reste le cas $q=2$, $n=1$. Le terme qui apparaît est $a_{m+1,1}a_{p-m+1,1}$, et il est nul, car $a_{m+1,1}=0$.
De même, dans les sommes suivantes, tous les termes sont nuls, sauf celui qui correspond à $n=0$. Ainsi, on trouve que $(A_{p,q})$ devient

$$\begin{aligned}(A'_{p,q})\ 4 & \sum_{1\leq m\leq p-1}a_{m-1,1}(q+1)a_{p-m-1,q+1}+4\sum_{0\leq m\leq p-1}(m+1)a_{m+1,0}(q+1)a_{p-m-1,q+1}\\ & +\sum_{0\leq m\leq p}a_{m,1}(q+1)a_{p-m,q+1}=0,\quad \forall\, p, \forall\, q\geq 2.\end{aligned}$$

Étant donné que dans la dernière somme le coefficient $a_{m,1}$ est nul sauf si $m=0$, on trouve

$$(A''_{p,q})\ (q+1)a_{p,q+1}=4\sum_{1\leq m\leq p-1}a_{m-1,1}(q+1)a_{p-m-1,q+1}+4\sum_{0\leq m\leq p-1}(m+1)a_{m+1,0}(q+1)a_{p-m-1,q+1}.$$

Cette formule donne $a_{p,q+1}$ en fonction de $a_{k,q+1}$, $k=0,\ldots,p-1$. Par récurrence sur p, on trouve $a_{p,q+1}=0$.

Finalement, $v(x,y)=x+x^2-y$, d'où $u(x,y)=x+y$.