Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2007-2008

Corrigé du devoir maison no 3

On se propose de montrer que (pour $I =]-1,1[$) l'inclusion $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^p(I)$ est compacte (ici, $1 \leq p < \infty$).

a) On suppose d'abord $1 < p < \infty$. Soit $(g_n) \subset L^p(I)$ une suite telle que $g_n \rightharpoonup g$. On pose $f_n(x) := \displaystyle\int_{-1}^{x} g_n(t)\,dt$, $f(x) := \displaystyle\int_{-1}^{x} g(t)\,dt$. Montrer que $f_n \to f$ dans $L^p(I)$.

Démonstration. Soit q l'exposant conjugué de p.
La suite (g_n) étant faiblement convergente, elle est bornée : $\exists\, C$ tel que $\|g_n\|_{L^p} \leq C$ (et donc $\|g\|_{L^p} \leq C$). Pour tout x et n, on a

$$|f_n(x)| \leq \|g_n\|_{L^p([-1,x])}(1+x)^{1/q} \leq 2^{1/q}C := D.$$

On a donc $|f_n| \leq D$, $\forall\, n$. Par ailleurs, on a $\chi_{[-1,x]} \in L^q(I)$, d'où

$$f_n(x) = \langle g_n, \chi_{[-1,x]}\rangle \to \langle g, \chi_{[-1,x]}\rangle = f(x).$$

Par convergence dominée, on trouve que $f_n \to f$ dans L^p. $\square$

b) On suppose $p = 1$. Soit $(g_n) \subset L^1(I)$ une suite telle que $g_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \in \mathscr{M}(\overline{I})$. On pose $f_n(x) := \displaystyle\int_{-1}^{x} g_n(t)\,dt$, $f(x) := \mu([-1,x])$. Montrer que $f_n \to f$ dans $L^1(I)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que toute sous-suite (f_{n_k}) contient une sous-suite $(f_{n_{k_l}})$ qui converge vers f dans L^1. (Ceci est une conséquence de l'exercice suivant appliqué à $X = L^1$ et $x_n = f_n$)

Exercice. Soit (X,d) un espace métrique. Soient $(x_n) \subset X$ et $x \in X$ tels que, pour toute sous-suite (x_{n_k}), il existe une sous-suite $(x_{n_{k_l}})$ telle que $x_{n_{k_l}} \to x$. Alors $x_n \to x$. [Prouver-le !]

On peut supposer g_n et μ positives. En effet, comme ci-dessus, il existe C telle que $\|g_n\|_{L^1} \leq C$ (d'où μ est une mesure finie). On trouve que les suites (g_n^+) et (g_n^-) sont bornées dans L^1. Ainsi, pour toute extraction (n_k), il existe des sous-suites $(g^{\pm}_{n_{k_l}})$ qui convegent $*$-faiblement vers des mesures finies $\mu^{\pm}$. Il suffit alors de montrer la conclusion demandée avec, par exemple, $g^+_{n_{k_l}}$ et μ^+ à la place de $g_{n_{k_l}}$ et μ.
Pour résumer : (quitte à noter les sous-suites (g_n) plutôt que (g_{n_k})), on a à montrer que, si $g_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \in \mathscr{M}(\overline{I})$, avec $g_n \geq 0$ et $\mu \geq 0$, alors $f_n \to f$ dans L^1.
La mesure μ étant finie, l'ensemble $A := \{x \in [-1,1]\ ;\ \mu(\{x\}) > 0\}$ est au plus dénombrable.

Lemme. (sous une formulation différente, c'est un grand classique en probas) Si $x \notin A$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{x} g_n(t)\,dt \to \mu([-1,x])$.

Démonstration. On suppose $x \in I$. La preuve s'adapte facilement au cas où $x = \pm 1$. Soit $x \notin A$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $r > 0$ tel que $\mu([x-r,x+r]) < \varepsilon$. Soient $\psi_j \in C^\infty([-1,1])$, $j = 1,2$ telles que

Par définition de la convergence faible-$*$, choix de r et positivité de g_n et μ, on a alors

$$\mu([-1,x]) - \varepsilon \leq \mu([-1,x-r]) \leq \lim \int g_n\psi_1 \leq \underline{\lim} \int_{-1}^{x} g_n(t)\,dt$$
$$\leq \overline{\lim} \int_{-1}^{x} g_n(t)\,dt \leq \lim \int g_n\psi_2 \leq \mu([-1,x+r]) \leq \mu_1([-1,x]) + \varepsilon.$$

ε étant arbitraire, on trouve $\displaystyle\int_{-1}^{x} g_n(t)\,dt \to \mu([-1,x])$ si $x \notin A$. □

On a donc $f_n \to f$ en dehors de l'ensemble au plus dénombrable A, d'où $f_n \to f$ λ_1-p. p. □

c) Conclure.

Démonstration. Soit (F_n) un suite bornée de $W^{1,p}(I)$. Soit $g_n := F_n'$, qui est bornée dans $L^p(I)$. Quitte à extraire une suite (notée par commodité encore (g_n)), on peut trouver :
- si $p > 1$, un $g \in L^p(I)$ tel que $g_n \rightharpoonup g$;
- si $p = 1$, une mesure μ telle que $g_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$.

On définit f_n, f comme dans a) ou b), de sorte que $f_n' = g_n$. On a donc $F_n - f_n = C_n$ et la suite de constantes (C_n) est bornée dans L^p, donc bornée tout court. Ainsi, quitte à extraire à nouveau, on peut supposer $C_n \to C$. Clairement, on a $F_n = f_n + C_n \to f + C$ dans L^p.
C'est-à-dire : à une extraction près, (F_n) converge dans L^p. □

d) Si $p > 1$, montrer que l'inclusion $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C([-1,1])$ est compacte. (Penser à un critère célèbre de compacité.)

Démonstration. Soit (f_n) une suite bornée de $W^{1,p}(I)$. La suite (f_n) est donc bornée dans $C(\overline{I})$. Par ailleurs, on a, si $-1 \leq x \leq y \leq 1$,

$$|f_n(y) - f_n(x)| = \left| \int_x^y f_n'(t)\,dt \right| \leq (y-x)^{1/q} \|f_n'\|_{L^p(I)} \leq C(y-x)^{1/q}.$$

La suite (f_n) vérifie donc les hypothèses du théorème d'Ascoli. □

e) Retrouver, pour $p > 1$, la conclusion du devoir à partir de la dernière question.

Démonstration. L'inclusion de $C(\overline{I})$ dans $L^p(I)$ étant continue (car $\|f\|_{L^p} \leq 2^{1/p}\|f\|_{L^\infty}$), on trouve que l'inclusion de $W^{1,p}(I)$ dans $L^p(I)$ est compacte, car composée d'une application linéaire et compacte et d'une application linéaire et continue. □