Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2007-2008

Devoir maison no 4+ Feuille d'exercices no 11

Ici, $\lambda_n = \lambda_n(\alpha, a)$ et $u_n = u_n(\alpha, a)$ sont définis comme dans la feuille 10. Les hypothèses sur α et a sont celles de la feuille 10. S est la sphère unité de $L^2(I)$.

Exercice 1.

a) Montrer que $Q(u) = \sum \lambda_n (u, u_n)^2$, $\forall\, u \in H_0^1(I)$.
[On pourra raisonner par densité.]

b) Soit V un sous espace de dimension n de $H_0^1(I)$. Montrer qu'il existe un $u \in V$ tel que $\|u\|_{L^2} = 1$ et $Q(u) \geq \lambda_n$.

c) En déduire la formule "min-max"

$$\lambda_n = \min_{\substack{V \subset H_0^1(I) \\ \dim V = n}} \max_{u \in V \cap S} Q(u).$$

d) En déduire que, si $\alpha \leq \beta$ et $a \leq b$, alors $\lambda_n(\alpha, a) \leq \lambda_n(\beta, b)$.

Exercice 2.

a) Soient (μ_n) une suite strictement croissante et $(v_n) \subset H_0^1(I)$ une base orthonormée de $L^2(I)$ telles que $-(\alpha v_n')' + a v_n = \mu_n v_n$, $\forall\, n$. Montrer que $\lambda_n = \mu_n$ et $v_n = \pm u_n$.

b) Trouver λ_n et u_n si $\alpha = 1$ et $a = 0$.

Exercice 3. Montrer qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ (dépendant de α et a) telles que $C_1 n^2 \leq \lambda_n \leq C_2 n^2$.