UE Introduction aux équations aux dérivées partielles **Examen du 29 mai 2008**

Tous les documents sont autorisés *Durée: 3h*

Les exercices sont indépendants

Solutions explicites

Exercice 1

a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver une solution de l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + \alpha u(x,t), \quad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,\,\infty[, \tag{1}$$

où $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifie la condition initiale $u(x,0) = g(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ et g est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$.
Montrer que, pour tout $t > 0$, $u(\cdot,t)$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^n$.

b) On pose $I =]0,\,1[$. Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \alpha u(x,t), \quad \forall\,(x,t) \in \overline{I} \times]0,\,\infty[, \tag{2}$$

avec les conditions aux limites $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $\forall\, t > 0$ et la condition initiale $u(\cdot,0) = g$ où g est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $g(0) = g(1) = 0$.

Indication. On pourra se servir, sans les justifier, des formules donnant une solution de (1), respectivement la solution de (2), dans le cas $\alpha = 0$. Pour se ramener au cas $\alpha = 0$, faire le changement de fonctions $u(x,t) = f(t)\,v(x,t)$ avec v solution de (1) ou (2) dans le cas $\alpha = 0$.

Exercice 2

Soit $\varepsilon \geq 0$, on considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\big(u(1+\frac{u}{2})\big)(x,t) = \varepsilon\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times]0,\,\infty[, \tag{3}$$

et la condition initiale $u(\cdot,0) = g$.

a) On suppose dans un premier temps que $\varepsilon = 0$ et que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R} \times [0,\infty[$. On pose $v(x,t) = u(x+t,t)$. Préciser l'équation satisfaite par v et donner $v(\cdot,0)$.

b) On suppose ici que $g = 1_{[0,1]}$, la fonction indicatrice du segment $[0,\,1]$. Résoudre l'équation aux dérivées partielles satisfaite par v (obtenue à la question a)) avec la donnée initiale $g = 1_{[0,1]}$ à l'aide des caractéristiques en prenant soin de préciser la position des discontinuités. Représenter le résultat dans le plan (x,t).

c) Proposer, sans justifier les calculs, une solution u pour le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\big(u(1+\frac{u}{2})\big)(x,t) = 0, \quad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times]0,\,\infty[, \tag{4}$$

et telle que $u(\cdot,0) = 1_{[0,1]}$.

On suppose dorénavant que $\varepsilon = 1$.
d) Si $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$, montrer que $v(x,t) = u(x+t, t)$ est solution de

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{v^2}{2}\Big)(x,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t), \quad \forall\, (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,\infty[.$$

e) Pour cette question, on ne demande pas de justifier les calculs. On se contentera de faire des calculs formels, en supposant que, pour t fixé, la fonction $x \mapsto v(x,t)$ et ses dérivées convergent suffisamment vite vers 0 lorsque $x \to -\infty$.
On pose $w(x,t) = \exp\big(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} v(y,t)dy\big)$. Montrer que w est solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Proposer une solution u de l'équation (3) pour $\varepsilon = 1$.

Solutions faibles de problèmes elliptiques

Soient $I =]-1, 1[$ et $f \in L^2(I)$. On considère l'équation (E) $-(u')' + u = f$ dans I, d'inconnue $u \in H^1(I)$.

a) Montrer que si $u \in H^1(I)$ est solution de (E), alors $u' \in \mathcal{C}(\overline{I})$. En déduire que pour $u \in H^1(I)$, le problème

$$-(u')' + u = f, \quad \forall\, x \in I, \quad u'(-1) = u'(1) = 0, \tag{5}$$

a un sens.

b) Soit $J : H^1(I) \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (u')^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u^2(x)\,dx - \int_{-1}^{1} u(x) f(x)\,dx.$$

Montrer que J admet un minimum unique $u \in H^1(I)$ et que cet u vérifie

$$\int_{-1}^{1} u'(x)\,\phi'(x)\,dx + \int_{-1}^{1} u(x)\,\phi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\phi(x)\,dx, \quad \forall\, \phi \in H^1(I). \tag{6}$$

c) En déduire que $-(u')' + u = f$ dans I.

d) Pour $0 < \varepsilon < 1$, on considère les fonctions $\phi_{-1,\varepsilon}$ et $\phi_{1,\varepsilon}$ définies dans $\overline{I}$ par

$$\phi_{-1,\varepsilon}(x) = -\frac{x+1-\varepsilon}{\varepsilon}, \quad \forall\, x \in [-1, -1+\varepsilon[, \quad \phi_{-1,\varepsilon}(x) = 0, \quad \forall\, x \in [-1+\varepsilon, 1],$$
$$\phi_{1,\varepsilon}(x) = \frac{x-1+\varepsilon}{\varepsilon}, \quad \forall\, x \in]1-\varepsilon, 1], \quad \phi_{1,\varepsilon}(x) = 0, \quad \forall\, x \in [-1, 1-\varepsilon].$$

Montrer que $\phi_{-1,\varepsilon} \in H^1(I)$ et $\phi_{1,\varepsilon} \in H^1(I)$.

e) En utilisant (6) avec $\phi = \phi_{-1,\varepsilon} \in H^1(I)$ et $\phi = \phi_{1,\varepsilon} \in H^1(I)$, montrer que $u'(1) = u'(-1) = 0$.
En déduire que le problème (5) admet une solution faible.