Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2007-2008

Partiel
–le lundi 31 mars 2008. Durée deux heures–

Exercice 1. À toute fonction $f \in C([0,\pi])$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$ on associe les coefficients $a_n(f)$, $n \in \mathbb{N}^*$, définis par $a_n(f) := \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
On rappelle le résultat suivant, qui sera admis par la suite :

$$\text{Si } a_n(f) = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \text{ alors } f \equiv 0.$$

On considère le problème

$$(P)\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{dans } [0,\pi]\times[0,+\infty[\\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0,\pi] \\ u_t(x,0) = 0 & x \in [0,\pi] \end{cases}.$$

Ici, $f \in C^2([0,\pi])$, $f(0) = f(\pi) = 0$ et on cherche une solution $u \in C^2([0,\pi]\times[0,+\infty[)$.

On suppose que u existe. On pose $A_n(t) := a_n(u(\cdot,t))$, $t \geq 0$.
a) Calculer A_n'' en fonction de A_n.
b) Calculer A_n en fonction de $a_n(f)$.
c) En déduire que (P) a au plus une solution.
d) Proposer une solution de (P).
e) (Question plus difficile) On suppose que $|a_n(f)| \leq \dfrac{C}{n^k}$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de k est-on sûrs que $u \in C^2$? Proposer des conditions sur f qui assurent que $u \in C^2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Soit $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/4t} f(y)\,dy, & \text{si } t > 0 \\ f(x), & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que $u \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$.
b) Écrire les grandes lignes du raisonnement qui mène aux conclusions

suivantes : $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ et $u_t - u_{xx} = 0$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
c) (Question plus difficile) Montrer que $u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$.

Problème. On se propose d'étudier le problème

$$(P) \begin{cases} |\nabla u| = 1 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}.$$

La donnée du problème est $\varphi \in C^3(\mathbb{R})$. On cherche une solution $u = u(x,y)$ de classe C^2 dans $\mathbb{R} \times R_+$.

a) On suppose $\varphi(x) = ax$, avec $a \in \mathbb{R}$ constante. Si u est solution de (P), calculer $u_y(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Trouver, pour $\varphi(x) = ax$ et $|a| < 1$, toutes les solutions de (P).

c) Si φ est quelconque, donner une condition nécessaire pour l'existence d'une solution de (P).

On suppose, dans la suite, (H) $\boxed{-1 < \varphi'(x) < 1,\ \varphi''(x) \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}}$

d) Écrire, pour φ satisfaisant (H), les solutions formelles de (P) données par la méthode des caractéristiques.
e) (Question difficile) Montrer que, si φ satisfait (H), alors l'application

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\ \Phi(x,t) := (x + 2t\varphi'(x),\ 2t\sqrt{1 - \varphi'^2(x)})$$

est un C^2-difféomorphisme.
Indication : montrer que les applications

$$\eta :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad \eta(s) := \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$$

et

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi(x) := \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1 - \varphi'^2(x)}}$$

sont croissantes.
f) Conclusion ?