Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2007-2008

Corrigé du partiel

Exercice 1. a) On a $A_n(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi u(x,t)\sin(nx)\,dx$. L'intégrande est C^2 dans l'ensemble des variables et on intègre sur un compact par rapport à la mesure de Lebesgue. Il s'ensuit que $A_n \in C^2$ et

$$A_n'(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_t(x,t)\sin(nx)\,dx, \quad A_n''(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_{tt}(x,t)\sin(nx)\,dx.$$

La deuxième égalité implique

$$\begin{aligned} A_n''(t) =& \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_{tt}(x,t)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_{xx}(x,t)\sin(nx)\,dx \\ =& \frac{2}{\pi}u_x(x,t)\sin(nx)\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2n}{\pi}\int_0^\pi u_x(x,t)\cos(nx)\,dx \\ =& -\frac{2n}{\pi}u(x,t)\cos(nx)\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2n^2}{\pi}\int_0^\pi u(x,t)\sin(nx)\,dx = -n^2 A_n, \end{aligned}$$

d'où $\boxed{A_n'' + n^2 A_n = 0}$.

b) Par ailleurs, on a $A_n(0) = a_n(f)$ et $A_n'(0) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi u_t(x,0)\sin(nx)\,dx = 0$.

Il s'ensuit que A_n est solution de $\begin{cases} A_n'' + n^2 A_n = 0 \\ A_n(0) = a_n(f) \\ A_n'(0) = 0 \end{cases}$, problème dont l'unique solution est $\boxed{A_n(t) = a_n(f)\cos(nt)}$.

c) Si u, v sont solutions, soit $t \geq 0$ et soit $w := u(\cdot,t) - v(\cdot,t)$. Alors $w \in C([0,\pi])$, $w(0) = w(\pi) = 0$ et $a_n(w) = a_n(u(\cdot,t)) - a_n(v(\cdot,t)) = a_n(f)\cos(nt) - a_n(f)\cos(nt) = 0$. On trouve que $w = 0$, d'où $u = v$.

d) Étant donnée que, si $g(0) = g(\pi) = 0$ et si g est suffisamment régulière, on a $g(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n(g)\sin(nx)$, $x \in [0,\pi]$, il est raisonnable de penser que la solution est donnée par

$\boxed{u(x,t) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nt)\sin(nx)}$.

f) On a $|\partial^\alpha(a_n(f)\cos(nt)\sin(nx))| \leq n^{|\alpha}|a_n(f)|$. Ainsi, si $k \geq |\alpha|+2$, alors $|\partial^\alpha(a_n(f)\cos(nt)\sin(nx))| \leq \dfrac{C}{n^2}$, d'où $\partial^\alpha u \in C$.

On obtient que $\boxed{u \in C^2 \text{ si } k \geq 4}$.

(On s'inspire des calculs pour le devoir maison.) On a $|a_n(f)| \leq \dfrac{C}{n^4}$ si $a_n(f^{(4)}) = n^4 a_n(f)$.

Pour que cette égalité soit vraie, il suffit d'avoir $\boxed{f \in C^4([0,\pi]),\ f(0) = f(\pi) = 0 \text{ et } f''(0) = f''(\pi) = 0}$

Exercice 2. Soit $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $v(x,t,y) := \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t} f(y)$, de sorte que, pour $t > 0$, $u(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} v(x,t,y)\, dy$.
Soit K un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Soient

$$a := \min\{t \; ; \; (x,t) \in K\} > 0, \quad b := \max\{t \; ; \; (x,t) \in K\}, \quad M := \max\{|x| \; ; \; (x,t) \in K\}.$$

Pour $(x,t) \in K$, on a

$$\begin{aligned} |v(x,t,y)| \leq & \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-(x-y)^2/4b} e^y \\ \leq & \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-y^2/4b} e^y e^{xy/2b} \\ \leq & \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-y^2/4b + y + M|y|/2b} := h(y). \end{aligned}$$

La fonction h est intégrable. En effet, on a $\displaystyle\lim_{|y| \to \infty} \frac{h(y)}{1/(y^2+1)} = 0$, par croissances comparées, d'où $h(y) \leq \dfrac{C}{y^2+1}$ pour C convenable.
Par ailleurs, v est continue dans l'ensemble des variables, d'où u est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
b) En singeant la réponse de la question **a)**, on peut montrer que, dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, u est C^∞ et que toute dérivée ∂^α de u est donnée par $\partial^\alpha u(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \partial^\alpha v(x,t,y)\, dy$.
En particulier, $u_t - u_{xx} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} (v_t - v_{xx})(x,t,y)\, dy$.
On vérifie par calcul direct que $v_t - v_{xx} = 0$, d'où $u_t - u_{xx} = 0$.
c) Soit $t > 0$. Le changement affine $z = z(y) := \dfrac{x-y}{\sqrt{4t}}$ donne (*) $u(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x - \sqrt{4t} z) g(z)\, dz$; ici, $g(z) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$.
En notant que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g = 1$, on trouve que (*) reste encore vraie si $t = 0$. Ainsi, $u(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} w(x,t,z)\, dz$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, où $w(x,t,z) := \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} f(x - \sqrt{4t} z) e^{-z^2}$.
Soit K un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et soient

$$b := \max\{t \; ; \; (x,t) \in K\}, \quad M := \max\{x \; ; \; (x,t) \in K\}.$$

On a, pour $(x,t) \in K$,

$$|w(x,t,z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^M e^{\sqrt{4b}|z|} e^{-z^2} := k(z).$$

Comme dans la question **a)**, on a $k(z) \leq \dfrac{C}{z^2+1}$ pour C convenable ; k est donc intégrable.
Après avoir noté que w est continue, on trouve que u est continue.

Problème. a) On a $u_x(x,0) = a$ et $(u_x(x,0))^2 + (u_y(x,0))^2 = 1$. Donc :
- si $|a| > 1$, alors le problème n'a pas de solution ;
- si $|a| = 1$, alors $u_y(x,0) = 0$;
- si $|a| < 1$, alors il existe une fonction $\sigma : \mathbb{R} \to \{-1, 1\}$ telle que $u_y(x,0) = \sigma(x)\sqrt{1-a^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Comme $\sigma(x) = \dfrac{u_y(x,0)}{\sqrt{1-a^2}}$, on trouve que $\sigma \in C^1$, d'où σ est constante. Ainsi, dans ce cas on a deux possibilités : soit $u_y(x,0) = \sqrt{1-a^2}$, soit $u_y(x,0) = -\sqrt{1-a^2}$

b) Si u est solution de (P), alors $u_y(x,0) \equiv \varepsilon\sqrt{1-a^2}$, avec $\varepsilon \in \{-1,1\}$. Les caractéristiques de u sont données par le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2p & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = 2q & y(0) = 0 \\ \dot{z} = 2(p^2+q^2) \overset{(1)}{=} 2 & z(0) = ax_0 \\ \dot{p} = 0 & p(0) = a \\ \dot{q} = 0 & q(0) = \varepsilon\sqrt{1-a^2} \end{cases} .$$

Pour obtenir ce système, il est convenable de récrire la première équation de (P) sous la forme $|\nabla u|^2 = 1$, ou encore $p^2+q^2 = 1$; ceci donne $\overset{(1)}{=}$.
En intégrant, on trouve

$$x(s) = x_0 + 2as,\ y(s) = 2\varepsilon\sqrt{1-a^2}s,\ z(s) = ax_0 + 2s,\ p(s) = a,\ q(s) = \varepsilon\sqrt{1-a^2}.$$

Donc, si u est solution, alors $u(x_0+2as, 2\varepsilon\sqrt{1-a^2}s) = ax_0+2s$. On trouve $\boxed{u(x,t) = ax + \varepsilon\sqrt{1-a^2}t}$.
c) On doit avoir $(u_x(x,0))^2 + (u_y(x,0))^2 = 1$, ou encore $(\varphi'(x))^2 + (u_y(x,0))^2 = 1$. Pour que cette équation ait une solution, il faut avoir $\boxed{|\varphi'(x)| \le 1,\ x \in \mathbb{R}}$.
d) Comme dans la question **a)**, sous (H), on doit avoir $u_y(x,0) \equiv \varepsilon\sqrt{1-\varphi'^2(x)}$, avec $\varepsilon \in \{-1,1\}$. On trouve que, si u est solution, alors ses caractéristiques sont données par

$$\begin{cases} \dot{x} = 2p & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = 2q & y(0) = 0 \\ \dot{z} = 2(p^2+q^2) = 2 & z(0) = \varphi(x_0) \\ \dot{p} = 0 & p(0) = \varphi'(x_0) \\ \dot{q} = 0 & q(0) = \varepsilon\sqrt{1-\varphi'^2(x_0)} \end{cases} ;$$

d'où

$$x(s) = x_0+2\varphi'(x_0)s,\ y(s) = 2\varepsilon\sqrt{1-\varphi'^2(x_0)}s,\ z(s) = \varphi(x_0)+2s,\ p(s) = \varphi'(x_0),\ q(s) = \varepsilon\sqrt{1-\varphi'^2(x_0)}.$$

Pour $\varepsilon = 1$, on trouve que, si u est solution de (P) (telle que $u_y(x,0 \equiv \sqrt{1-\varphi'^2(x)})$, alors (1) $u(\Phi(x,t)) = \varphi(x) + 2t$. C'est cette équation que nous allons étudier par la suite.

[De même, si $\varepsilon = -1$, alors la solution correspondante vérifie, si elle existe, (2) $u(\Psi(x,t)) = \varphi(x)+2t$, où $\Psi(x,t) := (x+2\varphi'(x)t, -2\sqrt{1-\varphi'^2(x)}t)$. L'analyse de (2) est identique à celle de (1) est sera omise par la suite. En particulier, nous verrons que, sous (H), (1) donne bien une solution de (P). Il en sera de même pour (2).]

e) Préliminaires : On a $\eta'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}} + \dfrac{s^2}{\sqrt{1-s^2}^3} > 0$, d'où η est croissante. (H) implique que φ' est croissante. Par conséquent, $\psi = \eta \circ \varphi'$ l'est aussi.
Pour montrer que (1) donne une solution de (P), il suffit de montrer que Φ est un C^2-difféomorphisme. Clairement, $\Phi \in C^2$. Ainsi, il suffit de montrer :

que Φ est bijective ; que Φ est un difféomorphisme local (ce qui équivaut à Jac $\Phi \neq 0$).

Étape 1. Φ est un difféomorphisme local
On a Jac $\Phi = 2(1+2t\varphi''(x))\sqrt{1-\varphi'^2(x)} + \dfrac{4t\varphi'^2(x)\varphi''(x)}{\sqrt{1-\varphi'^2(x)}} > 0$.

Étape 2. Φ est injective
Soient $(x,t), (y,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ tels que $\Phi(x,t) = \Phi(y,s)$. [But : montrer que $x = y$ et $t = s$.]

En regardant la deuxième coordonnée de Φ, on trouve (3) $2s = \dfrac{\sqrt{1-\varphi'^2(x)}}{\sqrt{1-\varphi'^2(y)}} \cdot 2t$. En

injectant cette égalité dans la formule de la première coordonnée de Φ, on obtient (4) $x - y = 2t\sqrt{1-\varphi'^2(x)}(\psi(y) - \psi(x))$.
Supposons par l'absurde que $x \neq y$, Par symétrie, on peut supposer $x > y$. Alors le membre de gauche de (4) est > 0, alors que la monotonie de ψ implique que celui de droite est ≤ 0. Contradiction. Aini, $x = y$. En revenant à (3), on trouve $s = t$.
Étape 3. Φ est surjective
On se donne $(y, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. [But : trouver $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ tel que $\Phi(x, t) = (y, s)$.]
On a $\Phi(x, t) = (y, s) \iff t = \dfrac{s}{2\sqrt{1-\varphi'^2(x)}}$ et $h(x) := x + s\psi(x) = y$. Ainsi, il suffit de montrer que h est surjective.
Par monotonie de ψ, on a

$$x \leq 0 \Longrightarrow h(x) \leq x + s\psi(0) \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty.$$

De même, on a $h(x) \geq x + s\psi(0)$ si $x \geq 0$ et $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$.
On obtient que $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, c'est-à-dire h est surjective.
f) Si u est solution de (P) correspondant à $\varepsilon = 1$, alors (5) $u(\Phi(x, t)) = \varphi(x) + 2t$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Φ étant un C^2-difféomorphisme, on obtient à la fois que (5) détermine uniquement u et que le u ainsi obtenu est solution de (P). Analyse identique si $\varepsilon = -1$. Ainsi, sous (H), (P) a exactement deux solutions.