UE Introduction aux équations aux dérivées partielles Deuxième Session 17 juin 2008

Tous les documents sont autorisés. *Durée : deux heures 30*

Les exercices sont indépendants.

Solutions explicites

Exercice 1 (séparation de variables)

Soit $\gamma > 1$. On considère l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x\big(u^\gamma\big) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0. \tag{1}$$

On rappelle que pour une fonction $u = u(x,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la notation $\Delta_x u$ désigne la quantité $\Delta_x u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Le but de cet exercice est de calculer des solutions particulières de cette équation sous la forme $u(x,t) = v(t)w(x)$ avec v et w des fonctions strictement positives, t appartenant à un intervalle contenant 0.

i) Montrer que si une telle solution existe, alors il existe une constante $\mu \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{v'(t)}{v^\gamma(t)} = \mu = \frac{\Delta\big(w^\gamma\big)(x)}{w(x)}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t > 0.$$

ii) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $v(t) = ((1-\gamma)\mu\, t + \lambda)^{-1/(\gamma-1)}$ (cette expression n'a a priori un sens que pour t suffisamment petit).

iii) On va chercher des solutions de $\Delta\big(w^\gamma\big) = \mu w$ sous la forme $w(x) = |x|^\alpha$. Montrer qu'il faut choisir

$$\alpha = \frac{2}{\gamma - 1}, \quad \mu = \alpha\gamma(\alpha\gamma + n - 2).$$

iv) En déduire que $\mu > 0$ et que ce type de solution n'est définie que sur un intervalle de temps $[0,\, T^*]$ où T^* est une fonction de γ, λ et n qu'on explicitera.

Exercice 2 (équation des ondes)

i) On considère le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{pour } t > 0, x \in]0, L[\\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \\ u_t(x,0) = 0 & \\ u(x,0) = g(x) & \end{cases},$$

où

$$g(x) = x,\ \forall x \in [0,\, \frac{L}{4}], \quad g(x) = \frac{L}{2} - x,\ \forall x \in [\frac{L}{4},\, \frac{3L}{4}], \quad g(x) = x - L,\ \forall x \in [\frac{3L}{4},\, L].$$

Écrire la solution formelle $u(x,t)$ de ce problème.

Montrer que $u(x,L) = g(x)$.

Exercice 3

Résoudre avec la méthode des caractéristiques les équations suivantes:

$$i)\ x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2u(x,y), \quad u(x,1) = g(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ y > 0$$
$$ii)\ u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 1, \quad u(x,x) = \frac{x}{2},\ \ \forall\ y < 2.$$

Solutions faibles de problèmes elliptiques

Soit $I =]-1,1[$ et $f \in L^1(I)$. On considère l'équation (E) $-(u')' + u + u^3 = f$ dans I, d'inconnue $u \in H^1(I)$.

a) Montrer que si u est solution de (E), alors $u' \in \mathcal{C}(\overline{I})$. En déduire que pour $u \in H^1(I)$, le problème

$$-(u')' + u + u^3 = f, \quad u'(-1) = u'(1) = 0 \tag{2}$$

a un sens.

b) Soit $J : H^1(I) \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(u')^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}u^2(x)\,dx + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}u^4(x)\,dx - \int_{-1}^{1}u(x)f(x)\,dx.$$

Montrer que J admet un minimum unique $u \in H^1(I)$ et que cet u vérifie

$$\int_{-1}^{1}u'(x)\,\phi'(x)\,dx + \int_{-1}^{1}u(x)\,\phi(x)\,dx + \int_{-1}^{1}u^3(x)\,\phi(x)\,dx = \int_{-1}^{1}f(x)\,\phi(x)dx, \quad \forall\phi \in H^1(I). \tag{3}$$

c) En déduire que u est solution de (E).

Dans la suite, on suppose f continue sur $\overline{I}$.

d) Montrer que $u \in C^2(\overline{I})$.

e) Montrer que $-u'' + u + u^3 = f$.

f) En utilisant (3) avec ϕ fonction affine, montrer que $u'(-1) = u'(1) = 0$.