Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2008-2009

Devoir à la maison no 1
Semi-groupe de la chaleur

- On pose, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_t(x) := \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\dfrac{|x|^2}{4t}}$; c'est le noyau de la chaleur.
- On dénote par λ_n la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.
- On définit
$$C_b(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \; ; \; f \text{ continue et bornée}\},$$
muni de la norme $f \mapsto \|f\|_{L^\infty}$.
- Rappel : on peut regarder $C_b(\mathbb{R}^n)$ comme une partie de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. En effet, l'application
$$C_b(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \text{classe d'équivalence de } f \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^n)$$
est bien injective, car si deux fonctions continues sont égales λ_n-presque partout, alors elles sont égales.
- Rappel : $C_b(\mathbb{R}^n)$ est un sous espace fermé de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- Rappel : la transformée de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R}^n)$: si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sont telles que $\hat{f} = \hat{g}$, alors $f = g$ λ_n-presque partout.

Exercice 1. (Semi-groupe de la chaleur)

a) Calculer $\widehat{\Phi_t}$. (Pas besoin de faire une tartine.)

b) Montrer que $\Phi_t * \Phi_s = \Phi_{s+t}$ λ_n-presque partout.

c) Montrer que, si f, g sont continues sur $\mathbb{R}^n$, f est intégrable et g est bornée, alors $f * g$ est continue.

d) Montrer que $\Phi_t * \Phi_s = \Phi_{s+t}$.

e) À partir de la question a), trouver $\|\Phi_t\|_{L^1}$.

On pose, pour $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $S(t)f := f * \Phi_t$.

f) Montrer que $S(t)f \in C(\mathbb{R}^n)$.

g) Montrer que, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $S(t)f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

h) Montrer que $S(t)$ est une application linéaire, continue, de norme ≤ 1, de $L^p(\mathbb{R}^n)$ vers $L^p(\mathbb{R}^n)$.

i) Montrer que $S(t)S(s)f = S(t+s)f$, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Ou encore : $S(t)S(s) = S(t+s)$.

Cette propriété fait de $t \mapsto S(t)$ un semi-groupe ; c'est le semi-groupe de la chaleur.

Exercice 2. (Norme du semi-groupe de la chaleur)

a) Calculer, pour $1 \leq p \leq \infty$ et $t > 0$, $\|\Phi_t\|_{L^p}$.

b) Montrer que
$$\|S(t)\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))} \geq \sup_{s>0} \frac{\|\Phi_{s+t}\|_{L^p}}{\|\Phi_s\|_{L^p}}.$$

Exercice 3. (Solution de l'équation de la chaleur)

On considère le problème (P) $\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u_{|t=0} = f & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$.

Ici, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est donnée et on suppose que, pour un $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. On pose $u(x,t) = \begin{cases} S(t)f(x) & \text{si } t > 0 \\ f(x) & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

a) Montrer que $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times]0, \infty[)$.

b) Montrer que $u_t - \Delta_x u = 0$ dans $\mathbb{R}^n \times]0, \infty[$.

c) On suppose $1 \leq p < \infty$. Montrer que

$$[0, \infty[\ni t \mapsto u(\cdot, t) \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

est continue.

d) Donner un sens à "u est solution de (P)".

e) On suppose $p = \infty$. Montrer que :

$\lim_{t \to 0+} \|u(\cdot, t) - f\|_{L^\infty} = 0 \Longleftrightarrow f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ et f est uniformément continue.