Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2008-2009

Corrigé sucint du devoir à la maison no 1
Semi-groupe de la chaleur

**Exercice 1.**

a) On a $\widehat{e^{-a|x|^2}}(\xi) = \pi^{n/2}a^{-n/2}e^{-|\xi|^2/4a}$. Avec $a = 1/4t$, cette formule donne $\widehat{\Phi_t}(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$.

b) Comme $\Phi_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a $\widehat{\Phi_t * \Phi_s} = \widehat{\Phi_t}\widehat{\Phi_s}$ =(compte tenu de a))= $\widehat{\Phi_{t+s}}$. Par injectivité de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, on a $\widehat{\Phi_t * \Phi_s} = \widehat{\Phi_{t+s}} \Longrightarrow \Phi_t * \Phi_s = \Phi_{t+s}$ $\lambda_n$-p. p.

c) Soit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = f(y)g(x - y)$. Par hypothèse, $F$ est continue et $|F(x, \cdot)| \leq |f(\cdot)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On trouve que $f * g = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} F(\cdot, y)\, dy$ est continue.

d) De la question précédente, $\Phi_t * \Phi_s$ est continue. De b), on déduit que $\Phi_t * \Phi_s = \Phi_{t+s}$ partout.

e) $\Phi_t$ étant positive, on a $\|\Phi_t\|_{L^1} = \widehat{\Phi_t}(0) = 1$.

f) Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact. Soit $M > 0$ tel que $|x| \leq M$, $\forall\, x \in K$. Soit $F(x, y) = \Phi_t(x - y)f(y)$. Pour montrer la continuité de $S(t)f$, il suffit de trouver $g$ intégrable telle que $|F(x, y)| \leq g(y)$, $\forall\, x \in K$, $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$.
On a clairement $|\Phi_t(x - y)| \leq h(y) := Ae^{By}e^{-|y|^2/4t}$, $\forall\, x \in K$, où $A = (4\pi t)^{-n/2}$, $B = M/2t$. Donc $|F(x, y)| \leq g(y) := |f(y)|h(y)$.
Comme $f \in L^p$, il suffit de montrer que $h \in L^{p'}$ pour avoir $g \in L^1$. Ainsi, il suffit de montrer que $h \in L^q$, $1 \leq q \leq \infty$. Pour $q = \infty$, on a $h \in L^\infty$, car $h$ est continue et sa limite à l'infini est nulle.
Soit $1 \leq q < \infty$. En rappelant que l'intégrale de référence $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1 + |y|^{n+1}}\, dy$ est convergente (pourquoi ?), il suffit de montrer que $h^q(y) \leq \dfrac{C_q}{1 + |y|^{n+1}}$. Cette inégalité découle de $\displaystyle\lim_{|y|\to\infty} h^q(y)(1 + |y|^{n+1}) = 0$.

g) On a $\|S(t)f\|_{L^p} = \|\Phi_t * f\|_{L^p} \leq$(inégalité de Young)$\leq \|\Phi_t\|_{L^1}\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$.

h) C'est dans le calcul précédent.

i) La convolution des fonctions mesurables positives est associative, d'où, si $f$ est mesurable positive, $S(t)S(s)f = \Phi_t * (\Phi_s * f) = (\Phi_t * \Phi_s) * f = \Phi_{t+s} * f = S(t + s)f$. Si $f \in L^p$, l'égalité précédente appliquée à $f_+$ et $f_-$ donne, par linéarité, le résultat.

**Exercice 2.**

a) Soit $C(t) := (4\pi t)^{-n/2}$. Alors, pour $1 \leq p < \infty$, on a
$$\|\Phi_t\|_{L^p}^p = C^p(t)\int e^{-p|x|^2/4t} = C^p(t)\widehat{e^{-p|x|^2/4t}}(0) = (4\pi t)^{n(1-p)/2}p^{-n/2},$$
d'où $\|\Phi_t\|_{L^p} = (4\pi t)^{n(1/p-1)/2}p^{-n/(2p)}$.
Par ailleurs, on a $\|\Phi_t\|_{L^\infty} = (4\pi t)^{-n/2}$.

b) On a
$$\|S(t)\Phi \qquad \|\Phi$$

c) D'une part, la norme de $S(t)$ est $\leq 1$. D'autre part, on a

$$\|S(t)\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^n),L^p(\mathbb{R}^n))} \geq \lim_{s\to\infty} \frac{\|\Phi_{s+t}\|_{L^p}}{\|\Phi_s\|_{L^p}} = 1.$$

**Exercice 3.**

a) Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n\times]0,\infty[$ et pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$, on a $|\partial^\alpha \Phi.(\cdot - y)| \leq Q_\alpha(y)e^{B|y|}e^{-C|y|^2}$, avec $B, C > 0$ constantes convenables et avec $Q_\alpha$ polynôme de $n$ variables. Comme dans la question f) de l'exercice 1, on a, pour $1 \leq q \leq \infty$, $\partial^\alpha\Phi.(\cdot - y) \in L^q$, ce qui donne d'une part $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n\times]0,\infty[)$, et d'autre part $\partial^\alpha u(x,t) = \displaystyle\int \partial^\alpha\Phi.(\cdot - y)|f(y)\,dy$.

b) De la question précédente, $(u_t - \Delta_x u) = \displaystyle\int (\partial_t - \Delta_x)\Phi.(\cdot - y)f(y)\,dy = 0$, car $(\partial_t - \Delta_x)\Phi.(\cdot - y) = 0$.

c) On pose $S(0) := id$. On doit montrer que $[0,\infty[\ni t \mapsto S(t)f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ est continue. Avec $\Phi(x) := \pi^{-n/2}e^{-|x|^2}$, la continuité est un cas particulier du fait plus général suivant :

**Théorème.** Soient : $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, et $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\displaystyle\int \Phi = 1$. On pose, pour $t > 0$, $\Phi_t(x) := t^{-n}\Phi(x/t)$, et $S(t)f := \Phi_t * f$. On pose aussi $S(0)f := f$. Alors $[0,\infty[\ni t \mapsto S(t)f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ est continue.

*Démonstration.* De par le lemme suivant, l'application $]0,\infty[\ni t \mapsto \Phi_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est continue.

On montre d'abord la continuité de $t \mapsto S(t)f$ en $t > 0$. On a $\|\Phi_s * f - \Phi_t * f\|_{L^p} \leq$(inégalité de Young)$\leq \|\Phi_s - \Phi_t\|_{L^1}\|f\|_{L^p} \to 0$ quand $s \to t > 0$.

On montre par la suite la continuité en $t = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\Phi - \psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Soit $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ (pour l'existence de $g$, on utilise $p < \infty$). Soit $M > 0$ tel que supp $\psi$, supp $g \subset \overline{B}(0,M)$. On a alors supp $\psi_s \subset \overline{B}(0,sM)$ et supp $\psi_s * g \subset$ supp $\psi_s +$ supp $g \subset \overline{B}(0,M+sM) \subset \overline{B}(0,2M)$ pour $s < 1/M$.

En rappelant que, si $g$ est continue et bornée et $\psi$ est continue à support compact, alors $\psi_s * g \to g\displaystyle\int\psi$ uniformément sur les compacts quand $s \to 0$, on trouve

$$\|\psi_s * g - g\int\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|\psi_s * g - g\int\psi\|_{L^p(\overline{B}(0,2M))} \to 0$$

quand $s \to 0$ (car sur un compact, la convergence uniforme entraîne la convergence dans tous les $L^p$).

Pour $s$ suffisamment petit, on trouve (en utilisant l'identité triviale $\displaystyle\int F_s = \int F$, $\forall\ s > 0$, $\forall\ F$, et l'inégalité de Young)

$$\begin{aligned}
\|S(s)f - f\|_{L^p} \leq\ & \|(\Phi - \psi)_s * f\|_{L^p} + \|\psi_s * (f - g)\|_{L^p} + \|\psi_s * g - g\int\psi\|_{L^p} \\
& + \|g\int\psi - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\
\leq\ & \varepsilon\|f\|_{L^p} + \varepsilon\|\psi\|_{L^p} + \varepsilon + \|g\|_{L^p}\left|\int(\Phi - \psi)\right| + \varepsilon \\
\leq\ & \varepsilon\|f\|_{L^p} + \varepsilon(1+\varepsilon) + \varepsilon(\|f\|_{L^p} + \varepsilon) + \varepsilon
\end{aligned}$$

**Lemme.** Soient $1 \le p < \infty$ et $\Phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Alors $]0,\infty[\ni t \mapsto \Phi_t \in L^p(\mathbb{R}^n)$ est continue.

*Démonstration.* On vérifie aisément que $\|\Phi_t\|_{L^p} = t^{n/p-n}\|\Phi\|_{L^p}$. Soit $(t_k)$ une suite telle que $t_k \to t > 0$. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit $M > 0$ tel que supp $\psi \subset \overline{B}(0,M)$. Si $R := \sup_k t_k$, alors supp $\psi_{t_k} \subset \overline{B}(0,RM)$, $\forall\ k$ (et, par passage à la limite, supp $\psi_t \subset \overline{B}(0,RM)$). Soit $\rho := \inf_k t_k > 0$. On a alors $\psi_{t_k} \to \psi_t$ simplement et $|\psi_{t_k}|^p \le \rho^{-np}\chi_{\overline{B}(0,RM)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, d'où $\psi_{t_k} \to \psi_t$ dans $L^p$.
Soient $\varepsilon > 0$ et $\Phi \in L^p$. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\Phi - \psi\|_{L^p} < \varepsilon$. Soit $(t_k)$ une suite telle que $t_k \to t > 0$. De ce qui précède, on a, pour $k$ grand et avec $\rho$ comme ci-dessus,

$$\begin{aligned}\|\Phi_{t_k} - \Phi_t\|_{L^p} \le & \quad \|\psi_{t_k} - \psi_t\|_{L^p} + \|(\Phi-\psi)_{t_k}\|_{L^p} + \|(\Phi-\psi)_t\|_{L^p} \\ \le & \quad \varepsilon + \rho^{n/p-n}\varepsilon + \rho^{n/p-n}\varepsilon,\end{aligned}$$

d'où $\Phi_{t_k} \to \Phi_t$ dans $L^p$. □

d) $u$ est solution de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n\times]0,\infty[$, alors que $\lim_{t\to 0+} u(\cdot,t) = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

e) $\Longleftarrow$ On suppose $f$ uniformément continue et bornée. On a alors

$$\begin{aligned}|f(x) - u(x,t)| = & \quad \pi^{-n/2}\left|\int e^{-|y|^2}(f(x) - f(x-\sqrt{4t}y))\,dy\right| \le \pi^{-n/2}\int e^{-|y|^2}|f(x)-f(x-\sqrt{4t}y)|\,dy \\ \le & \quad \pi^{-n/2}\int_{|y|\le R} e^{-|y|^2}\sup_{|y|\le R}|f(x)-f(x-\sqrt{4t}y)| + 2\pi^{-n/2}\int_{|y|>R} e^{-|y|^2}\|f\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

À $R$ fixé, le premier terme tend vers 0 uniformément en $x$ quand $t \to 0+$, par continuité uniforme de $f$. Ainsi,

$$\limsup_{t\to 0+}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x,t)-f(x)| \le \inf_{R>0} 2\pi^{-n/2}\int_{|y|>R} e^{-|y|^2}\|f\|_{L^\infty} = 0,$$

c'est-à-dire $u(\cdot,t) \to f$ uniformément quand $t \to 0+$.
$\Longrightarrow$ Cette partie est basée sur trois propriétés simples, laissées en exercice :
#1 une limite uniforme de fonctions bornées et uniformément continues est encore une fonction bornée et uniformément continue.
#2 une fonction lipschitizienne est uniformément continue.
#3 une fonction (sur $\mathbb{R}^n$) dont les dérivées partielles du premier ordre sont bornées est lipschitizienne.
D'une part, on a $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^\infty}$, par la question h) de l'exercice 1. Pour conclure, il suffit de montrer que (à $t$ fixé) $\partial_j u(\cdot,t) \in L^\infty$, $j = 1,\ldots,n$. Soit $K_j := \partial_j\Phi_t$, qui est intégrable (vérifier). Par la réponse à la question a) de cet exercice, on a $\partial_j u(x,t) = \int K_j(x-y)f(y)\,dy = \int K_j(y)f(x-y)\,dy$, d'où $|\partial_j u(x,t)| \le \|K_j\|_{L^1} < \infty$, $\forall\ x$.