Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2008-2009

Devoir à la maison no 2
Groupe de Schrödinger

- On désigne, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, par $\sqrt{z}$ la racine carrée principale de $z$, c'est-à-dire le seul $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^2 = z$ et $\operatorname{Re} w > 0$.
- On pose, pour $t \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_t(x) := \dfrac{1}{(\sqrt{4\pi\imath t})^n} e^{\dfrac{\imath |x|^2}{4t}}$ ; c'est le noyau de Schrödinger.
- Pour $t \neq 0$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on pose $S(t)g = \Phi_t * g$. Pour $t = 0$, on définit $S(0)g = g$. Ainsi, on a une application
$$\mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}^n) \ni (t, g) \mapsto S(t)g \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$
- On dénote par $\lambda_n$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.
- Rappel :
**Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.** On se donne $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{S}, \nu)$ deux espaces mesurés. On se donne $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ et $\theta \in ]0, 1[$. On définit $p, q \in [1, \infty]$ par $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_0} + \dfrac{1-\theta}{p_1}$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\theta}{q_0} + \dfrac{1-\theta}{q_1}$.
Soit $T : (L^{p_0} \cap L^{p_1})(X, \mu) \to (L^{q_0} + L^{q_1})(Y, \nu)$ un opérateur linéaire satisfaisant $\|Tf\|_{L^{q_j}} \leq M_j \|f\|_{L^{p_j}}$, $j = 0, 1$.
Alors $T$ est continu de $L^p$ vers $L^q$. Plus précisément, on a $\|Tf\|_{L^q} \leq M_0^\theta M_1^{1-\theta} \|f\|_{L^p}$, $\forall\, f \in (L^{p_0} \cap L^{p_1})(X, \mu)$.
Pour une preuve, voir Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Springer, 1990, Thm. 7.1.12, pp. 164-165.
- Rappel : l'identité de Parseval est
$$\int g(x) h(x)\, dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{g}(\xi) \hat{h}(-\xi)\, d\xi, \quad g, h \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

**Exercice 1.** (Groupe de Schrödinger)

a) On pose, pour $t \neq 0$, $g^t(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{4\pi\imath t})^n} e^{\dfrac{\imath |x|^2}{4t}} g(x)$. Montrer que, pour $t \neq 0$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $S(t)g(x) = e^{\dfrac{\imath |x|^2}{4t}} \widehat{g^t}\left(\dfrac{x}{2t}\right)$.

b) Montrer que $\|S(t)g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\forall\, g \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$.

c) En déduire que $S(t)$ s'étend de manière unique comme isométrie linéaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Pour $\varepsilon > 0$ et $t \neq 0$, on pose $\Phi_{\varepsilon,t}(x) := \dfrac{1}{(\sqrt{4\pi(\varepsilon + \imath t)})^n} e^{-\dfrac{|x|^2}{4(\imath t + \varepsilon)}}$.

d) Pour $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, calculer $\widehat{\Phi_{\varepsilon,t} * g}$. Montrer que $\Phi_{\varepsilon,t} * g \to S(t)g$ simplement quand $\varepsilon \to 0+$.

f) Montrer que $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\ s,t \in \mathbb{R}$, au sens où $S(t+s)g = S(t)S(s)g$, $\forall\ g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

g) En déduire que $S(t)$ est unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathbb{R} \ni t \mapsto S(t)$ est un isomorphisme de groupes.

Cette propriété fait de $S(t)$ un groupe : c'est le groupe de Schrödinger.

h) Montrer que, pour $t \neq 0$, $S(t)$ est continu de $L^1(\mathbb{R}^n)$ vers $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, de norme $\leq (4\pi|t|)^{-n/2}$.

i) En déduire que, pour $p \in ]1,2[$ et $t \neq 0$, $S(t)$ admet une unique extension linéaire et continue de $L^p(\mathbb{R}^n)$ vers $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, de norme $\leq (4\pi|t|)^{n/2-n/p}$. Ici, $p'$ est l'exposant conjugué de $p$.

**Exercice 2.** (Solution de l'équation de Schrödinger)

On considère le problème $(P)$ $\begin{cases} \imath u_t + \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u_{t=0} = g \end{cases}$.

Ici, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est donnée et on cherche $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

a) Écrire la définition d'une solution faible, $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, de l'équation $(S)$ $\imath u_t + \Delta_x u = 0$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. On pose $\psi(\xi,t) := \mathscr{F}_x\varphi(\cdot,t)(\xi)$. C'est-à-dire : à $t$ fixé, $\xi \mapsto \psi(\xi,t)$ est la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$.

b) Calculer, en fonction de $\psi$, $\mathscr{F}_x\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(\cdot,t)\right)$ et $\mathscr{F}_x(\Delta_x\varphi(\cdot,t))$.

On se donne $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et on pose $u(\cdot,t) = S(t)g$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

d) Montrer que $u$ est solution faible de $(S)$ si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \hat{g}(\xi) e^{-\imath t|\xi|^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi(-\xi,t) - \imath|\xi|^2\psi(-\xi,t)\right) = 0,\ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

e) En déduire que, si $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $u$ est solution de $(P)$ au sens suivant :
- $u$ est solution faible de $(S)$ ;
- $\lim\limits_{t \to 0} \|u(\cdot,t) - g\|_{L^2} = 0$.