Devoir Maison: Introduction aux EDP

Exercice 1

i) Résoudre, à l'aide de la méthode des caractéristiques, l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x > 0,\ t > 0,$$

avec la donnée initiale $u(0,x) = f(x)$ et $\partial_t u(0,x) = 0$, pour tout $x > 0$ et la condition aux limites $\partial_x u(t,0) = 0$.

ii) Retrouver le résultat en prolongeant la fonction u sur $\mathbb{R}$ par parité et en résolvant l'équation des ondes dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Exercice 2

Résoudre à l'aide de la méthode des caractéristiques l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} = -2\, u, \quad \forall t > 0,$$

avec la condition initiale $u(0,x) = x$.

Exercice 3

Le but de cet exercice est d'obtenir les *équations de Saint Venant* décrivant le mouvement d'un fluide mince et soumis à la gravité. On considère un fluide de densité ρ s'écoulant dans un canal incliné de section A et de pente θ. On considère un système de coordonnées où l'axe des abscisses $(0x)$ est dirigé selon la pente du canal. L'écoulement est considéré unidimensionel: on note $h(x,t)$ la hauteur du fluide au point x, $u(x,t)$ la vitesse du fluide le long de la pente au point x. On suppose que le fluide n'est soumis qu'à la gravité et à une force de frottement $f = -\rho c_f\, u^2$ et à la pression, qui est hydrostatique $p(x,z,t) = \rho\, g(h(x,t) - z)$.

i) Montrer, en faisant un bilan de masse entre x et $x + dx$ que la hauteur h vérifie

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h\, u)}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

ii) Donner le flux de quantité de mouvement rentrant en x et sortant en $x+dx$. Montrer également que la force de pression dans la direction parallèle à l'écoulement exercée en x et $x+dx$ est donnée par

$$f_p(x,t) = \rho A g \frac{h(t,x)^2}{2}, \quad f_p(x+dx,t) = -\rho A g \frac{h(t,x+dx)^2}{2}.$$

iii) En utilisant la loi fondamentale de Newton (donnée par $m\,\vec{a} = \sum \vec{f}_{ext}$ dans le cas d'un solide) appliquée à la tranche de fluide comprise entre x et $x+dx$, montrer l'équation

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(h\,u^2)}{\partial x} + \frac{g}{2}\frac{\partial h^2}{\partial x} = g\,h\sin(\theta) - c_f\,u^2. \tag{2}$$

Le système d'équations aux dérivées partielles formé de (1,2) est appelé système de Saint Venant. On se propose d'étudier les solutions de petite amplitude de ce système lorsque $\theta = 0$ (fond plat) et sans frottement $c_f = 0$. Le système prend la forme

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad \partial_t(hu) + \partial_x\big(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\big) = 0. \tag{3}$$

iv) On cherche des solutions sous la forme $h = \overline{h} + \eta\widetilde{h}$ et $u = \eta\widetilde{u}$ avec $\eta \ll 1$ et $\overline{h} > 0$ une constante. En insérant cet ansatz dans le système (3) et en ne retenant que les termes d'ordre $\mathcal{O}(\eta)$, montrer que $(\widetilde{h}, \widetilde{u})$ vérifie le système

$$\partial_t\widetilde{h} + \overline{h}\partial_x\widetilde{u} = 0, \quad \overline{h}\partial_t\widetilde{u} + g\overline{h}\partial_x\widetilde{h} = 0.$$

v) En déduire que $\widetilde{h}, \widetilde{u}$ vérifient une équation des ondes de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

avec $c^2 = g\overline{h}$. Expliquer alors le comportement qualitatif des solutions de petite amplitude du système de Saint Venant (3).

Exercice 4 (Principe du maximum pour l'équation de Laplace)

Soit Ω un ouvert connexe et borné dans $\mathbb{R}^n$. Soit $g \in C(\partial\Omega)$ et soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ solution de $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$.

i) On suppose qu'il existe $x \in \Omega$ point de maximum de u sur $\overline{\Omega}$. Montrer que, pour $0 < r \leq$dist $(x, \partial\Omega)$, on a $u(y) = u(x)$ pour tout $y \in S(x,r)$ (on pourra se servir de la formule de la moyenne).

ii) En déduire que $\{y \in \Omega \ ; \ u(y) = u(x)\}$ est un ouvert-fermé de Ω.

iii) En déduire le principe du maximum sous la forme suivante :

- ou bien on a $\min\limits_{y\in\partial\Omega} g(y) < u(x) < \max\limits_{y\in\partial\Omega} g(y)$, $\forall x \in \Omega$;
- ou bien u est constante.

iv) En déduire une autre forme du principe du maximum :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

Exercice 5

Soient $\Omega =]0,\pi[^2$ et $g \in C(\partial\Omega)$. On cherche à résoudre, par la méthode de la séparation des variables, le problème $(P)\begin{cases}\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega\\ u = g & \text{sur } \partial\Omega\end{cases}$.

i) Résoudre ce problème "à la main" si $g(x,y) = a + bx + cy + dxy$. En déduire qu'il suffit de savoir résoudre (P) si g vaut 0 dans les sommets de $\partial\Omega$.

ii) Montrer qu'il suffit de savoir résoudre (P) si g s'annule sur tous les côtés de $\partial\Omega$ sauf un.

iii) Réduire la problème de départ, (P), à la résolution du cas particulier suivant de (P) : $(P')\begin{cases}\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega\\ u(x,0) = h(x) & x \in [0,\pi]\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus [0,\pi]\times\{0\}\end{cases}$. Ici, $h \in C([0,\pi])$ satisfait les conditions de compatibilité $h(0) = h(\pi) = 0$.

iv) Rechercher des solutions particulières de (P') sous la forme $\Phi(x)\Psi(y)$.

v) Trouver la solution formelle de (P').

vi) Montrer que (P) a exactement une solution.

Exercice 6

Résoudre le problème

$$\begin{cases}|\nabla u| = \sqrt{2} & \text{dans } \mathbb{R}^2\\ u(x,x^2) = x + x^2 & \\ u_x(1,1) = 1 & \end{cases}$$

a) en utilisant les développements en série ;

b) en utilisant la méthode des caractéristiques.