Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2008-2009

Examen du 29 mai 2009. Durée : trois heures

Problème. Nous nous proposons d'étudier le problème

$$(P)\ \begin{cases} -u'' + u^3 = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases},$$

où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est donnée et $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ est inconnue.

Rappel. Soit $u \in C^2([0,1])$. Si x_0 est un point de minimum de u, alors : ou bien $x_0 = 0$, ou bien $x_0 = 1$, ou bien $u''(x_0) \geq 0$.

De même, si x_0 est un point de maximum de u, alors : ou bien $x_0 = 0$, ou bien $x_0 = 1$, ou bien $u''(x_0) \leq 0$.

Partie I.

a) Soit $u \in C^2([0,1])$ solution de

$$\begin{cases} -u'' + a\,u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}.$$

Ici, $a > 0$ est une constante et $f \in C([0,1])$. Montrer que

$$-\frac{1}{a}\|f\|_{L^\infty} \leq u \leq \frac{1}{a}\|f\|_{L^\infty}.$$

b) Soit $u \in C^2([0,1])$ solution de (P), avec $f \in C([0,1])$, $f \geq 0$. Montrer que

$$0 \leq u \leq \sqrt[3]{\|f\|_{L^\infty}}.$$

Partie II. On étudie (P) avec $f \in L^2([0,1])$ donnée. On cherche des solutions généralisées de (P), c'est-à-dire $u \in H_0^1(0,1)$ telles que

$$(EG)\ \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 u^3(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx,\ \forall\, v \in H_0^1(0,1).$$

Dans ce but, on introduit $J : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} J(u) :&= \frac{1}{2}\int_0^1 u'^2(x)\,dx + \frac{1}{4}\int_0^1 u^4(x)\,dx - \int_0^1 f(x)u(x)\,dx \\ &\equiv A(u) + B(u) + C(u). \end{aligned}$$

Les questions a)-g) servent à montrer l'existence d'une solution généralisée. La question h) porte sur son unicité.

a) Montrer que, si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(0,1)$, alors $C(u_n) \to C(u)$.
b) Montrer que, si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(0,1)$, alors $B(u_n) \to B(u)$.
c) Montrer que J est une fonction convexe.
d) Montrer que J est continue.
e) Montrer que J est coercive (c'est-à-dire, que $\lim_{\|u\|_{H_0^1} \to \infty} J(u) = \infty$).
f) En déduire que J a un point de minimum.
g) Soit u un point de minimum de J. Montrer que u vérifie (EG).
h) Soient u_1, u_2 solutions de (EG). Montrer que $u_1 = u_2$.
[Indication : montrer que $u := u_1 - u_2$ est solution classique de $-u'' = u_2^3 - u_1^3$, puis appliquer le rappel.]
i) Conclusion ?

Partie III. On se propose de trouver un schéma itératif pour résoudre (P). Pour simplifier, on suppose $f \equiv 1$. Soit u la solution de (EG) pour $f \equiv 1$.

a) Montrer que $u \in C^2([0,1])$.
b) Montrer que $0 \leq u \leq 1$.
c) On définit la suite $(u_n) \subset C^2([0,1])$ de la manière suivante : $u_0 \equiv 0$ et, par récurrence, un fois u_n définie, u_{n+1} est la solution de
$$\begin{cases} -u''_{n+1} + 3u_{n+1} = 1 - u_n^3 + 3u_n \\ u_{n+1}(0) = u_{n+1}(1) = 0 \end{cases}.$$
Justifier très brièvement l'existence de u_{n+1} (on pourra se servir de résultats vus en cours ou TD).
d) On suppose que, pour un certain n, on ait $0 \leq u_n \leq u$. Montrer que
$$0 \leq 1 - u_n^3 + 3u_n \leq 1 - u^3 + 3u \equiv -u'' + 3u.$$
[Indication : quelle est, dans l'intervalle $[0,1]$, la monotonie de $t \mapsto 1 - t^3 + 3t$?]
e) En déduire que $0 \leq u_n \leq u$ pour tout n.

f) Montrer que $-u''_{n+1} + 3u_{n+1} \leq 3$.

g) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 (u'_{n+1})^2 \leq 3 \int_0^1 u_{n+1}$, puis que la suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(0,1)$.

h) En considérant l'équation satisfaite par $v_n := u_{n+1} - u_n$, montrer par récurrence sur n que $u_n \leq u_{n+1}$, $n \geq 0$.

i) On pose, pour tout $x \in [0,1]$, $v(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x)$. Justifier la définition.

On admet pour l'instant le résultat suivant :

(RA) Si $(u_n) \subset H_0^1(0,1)$ est bornée et $u_n \to v$ p. p., alors $u_n \rightharpoonup v$ faiblement.

j) Montrer que v satisfait (EG) pour $f \equiv 1$.

k) Conclusion ?

l) Prouver (RA).