Mathématiques Générales première année Année 2008-2009
Introduction aux équations aux dérivées partielles

Examen du 22 juin 2009. Durée : deux heures 30

Exercice 1 Avant de commencer l'exercice. On pourra utiliser sans preuve toutes les propriétés établies en cours ou TD pour l'équation de la chaleur.

On considère le problème

$$(P)\begin{cases} u_t - u_{xx} + F(u)(u_x)^2 = 0 & \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Ici, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. F et u_0 sont données, u est inconnue.
On cherche à ramener (P) à l'équation usuelle de la chaleur (qui correspond à $F \equiv 0$). Pour ce faire, on fait le changement de fonction $u = G(v)$, avec G fonction inconnue.
a) Trouver l'équation que doit satisfaire G de sorte que u soit solution de l'équation de la chaleur

$$(C)\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 & \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Dans ce cas, qui est v_0 ?
b) Résoudre l'équation trouvée au point **a)** lorsque $F \equiv 1$.
c) Trouver une solution formelle de (P) si $F \equiv 1$.
d) Montrer que, si $a \leq v_0 \leq b$, alors "la" solution formelle de (C) satisfait $a \leq v \leq b$.
e) Montrer que, si $F \equiv 1$ et u_0 est continue et bornée, alors (P) a une solution $u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \cap C^2(\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$.

Exercice 2 On se propose de deviner une formule de résolution de l'équation de Laplace

$$(L)\begin{cases} u_{yy} + u_{xx} = 0 & \text{pour } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Ici, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée, u est inconnue.
a) Calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-|x|}$.
b) En déduire la transformée de Fourier de $\mathbb{R} \ni x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Dans la suite, on cherche u telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,y)|\,dx \leq C$, $\forall\ y \in \mathbb{R}_+$, avec C indépendante de $y \geq 0$. On pose

$$v(y,\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath x\xi} u(x,y)\,dx.$$

c) Montrer que v est bornée.
d) En utilisant l'équation de Laplace $u_{yy} + u_{xx} = 0$, trouver, par un argument formel, une équation du second ordre satisfaite par v.
e) Résoudre cette équation.
[Indication : on pourra utiliser le point **c)**.]
f) Proposer une formule de résolution de (L).

Exercice 3 On considère l'équation

$$(E)\begin{cases} u_t - u\,u_x = -2\,u & \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

a) Résoudre cette équation à l'aide de la méthode des caractéristiques dans le cas $u_0(x) \equiv x$.
b) En déduire que, si $u_0(x) \equiv x$, alors la solution de (E) est définie pour tout $t > 0$.
c) Étudier le cas $u_0(x) = x^2$: la solution est-t-elle définie pour tout $t > 0$?