

Devoir à la maison no 1
 Groupe de Schrödinger

– On désigne, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, par \sqrt{z} la racine carrée principale de z , c'est-à-dire le seul $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^2 = z$ et $\operatorname{Re} w > 0$.

– On pose, pour $t \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_t(x) := \frac{1}{(\sqrt{4\pi it})^n} e^{\frac{i|x|^2}{4t}}$; c'est le noyau de Schrödinger.

– Pour $t \neq 0$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on pose $S(t)g = \Phi_t * g$. Pour $t = 0$, on définit $S(0)g = g$. Ainsi, on a une application

$$\mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}^n) \ni (t, g) \mapsto S(t)g \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

– On dénote par λ_n la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n .

– Rappel :

Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin. On se donne (X, \mathcal{F}, μ) et (Y, \mathcal{G}, ν) deux espaces mesurés. On se donne $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ et $\theta \in]0, 1[$. On définit

$$p, q \in [1, \infty] \text{ par } \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1} \text{ et } \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1}.$$

Soit $T : (L^{p_0} \cap L^{p_1})(X, \mu) \rightarrow (L^{q_0} + L^{q_1})(Y, \nu)$ un opérateur linéaire satisfaisant $\|Tf\|_{L^{q_j}} \leq M_j \|f\|_{L^{p_j}}$, $j = 0, 1$.

Alors T est continu de L^p vers L^q . Plus précisément, on a $\|Tf\|_{L^q} \leq M_0^\theta M_1^{1-\theta} \|f\|_{L^p}$, $\forall f \in (L^{p_0} \cap L^{p_1})(X, \mu)$.

Pour une preuve, voir Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Springer, 1990, Thm. 7.1.12, pp. 164-165.

– Rappel : l'identité de Parseval est

$$\int g(x)h(x) dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{g}(\xi)\hat{h}(-\xi) d\xi, \quad g, h \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Exercice 1. (Groupe de Schrödinger)

a) On pose, pour $t \neq 0$, $g^t(x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi it})^n} e^{\frac{i|x|^2}{4t}} g(x)$. Montrer que, pour $t \neq 0$ et

$$g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad S(t)g(x) = e^{\frac{i|x|^2}{4t}} \widehat{g^t}\left(\frac{x}{2t}\right).$$

b) Montrer que $\|S(t)g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall g \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$.

c) En déduire que $S(t)$ s'étend de manière unique comme isométrie linéaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{Pour } \varepsilon > 0 \text{ et } t \neq 0, \text{ on pose } \Phi_{\varepsilon,t}(x) := \frac{1}{(\sqrt{4\pi(\varepsilon + it)})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4(\varepsilon + it)}}.$$

d) Pour $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, calculer $\widehat{\Phi_{\varepsilon,t} * g}$. Montrer que $\Phi_{\varepsilon,t} * g \rightarrow S(t)g$ simplement quand $\varepsilon \rightarrow 0+$.

f) Montrer que $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$, au sens où $S(t+s)g = S(t)S(s)g$, $\forall g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

g) En déduire que $S(t)$ est unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathbb{R} \ni t \mapsto S(t)$ est un isomorphisme de groupes.

Cette propriété fait de $S(t)$ un groupe : c'est le groupe de Schrödinger.

h) Montrer que, pour $t \neq 0$, $S(t)$ est continu de $L^1(\mathbb{R}^n)$ vers $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, de norme $\leq (4\pi|t|)^{-n/2}$.

i) En déduire que, pour $p \in]1, 2[$ et $t \neq 0$, $S(t)$ admet une unique extension linéaire et continue de $L^p(\mathbb{R}^n)$ vers $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, de norme $\leq (4\pi|t|)^{n/2-n/p}$. Ici, p' est l'exposant conjugué de p .

Exercice 2. (Solution de l'équation de Schrödinger)

On considère le problème (P) $\begin{cases} uu_t + \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u_{t=0} = g \end{cases}$.

Ici, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est donnée et on cherche $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

a) Écrire la définition d'une solution faible, $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, de l'équation (S) $uu_t + \Delta_x u = 0$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. On pose $\psi(\xi, t) := \mathcal{F}_x \varphi(\cdot, t)(\xi)$. C'est-à-dire : à t fixé, $\xi \mapsto \psi(\xi, t)$ est la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \varphi(x, t)$.

b) Calculer, en fonction de ψ , $\mathcal{F}_x \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\cdot, t) \right)$ et $\mathcal{F}_x(\Delta_x \varphi(\cdot, t))$.

On se donne $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et on pose $u(\cdot, t) = S(t)g$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

d) Montrer que u est solution faible de (S) si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \hat{g}(\xi) e^{-it|\xi|^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi(-\xi, t) - i|\xi|^2 \psi(-\xi, t) \right) = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

e) En déduire que, si $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors u est solution de (P) au sens suivant :

- u est solution faible de (S) ;
- $\lim_{t \rightarrow 0} \|u(\cdot, t) - g\|_{L^2} = 0$.