Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles

Examen du 19 mai 2010 -durée trois heures-

Exercice 1.

On souhaite résoudre, avec $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^+)$, l'équation d'advection sur un intervalle semi infini :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \forall\, t > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} . \tag{1}$$

1. On suppose que $c < 0$: montrer que le problème (1) possède une solution unique dont on donnera l'expression.
2. On suppose que $c > 0$: montrer qu'il faut imposer une condition $u(0,t) = g(t)$, $\forall\, t > 0$ (où $g \in C^1$) pour que l'équation (1) possède une solution unique.
3. Montrer que cette solution est de classe C^1 si et seulement si $g(0) = u_0(0)$ et $g'(0) + cu_0'(0) = 0$.

Exercice 2.

On considère l'équation de Burgers

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0, \quad \forall\, t > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

1. On suppose $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Rappeler la méthode des caractéristiques pour résoudre (2). On montrera en particulier que les courbes caractéristiques sont des *droites*. Donner une condition suffisante pour que (2) possède une solution classique sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.
2. Résoudre *explicitement* (2) lorsque $u_0(x) = x$.
3. On choisit pour condition initiale u_0 tel que $u_0(x) = 0$ si $x \leq 0$, $u_0(x) = x/\alpha$ si $0 \leq x \leq \alpha$ et $u_0(x) = 1$ si $x \geq \alpha$. Construire la solution de (2) à l'aide des caractéristiques. Montrer que cette solution est continue et de classe C^1 par morceaux. Donner le comportement de la solution pour $\alpha \to 0$.

   Dans la suite, on va s'intéresser aux solutions de (2) lorsque u_0 est constante par morceaux.
4. Rappeler la définition des solutions faibles de (2). On se donne u_g, respectivement u_d fonctions de classe C^1 sur $\{(x,t); t \geq 0, x \leq ct\}$, respectivement sur $\{(x,t); t \geq 0, x \geq ct\}$. Donner une condition pour que $u(x,t) = \begin{cases} u_g(x,t), & \text{si } x < ct \\ u_d(x,t) & \text{si } x > ct \end{cases}$ soit une solution *faible*. Y'a-t-il unicité ? Donner une condition sur u_g et u_d permettant de choisir une solution physiquement acceptable.

On se donne u_0 tel que

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1, & \forall\, x < 0 \\ u_2, & \forall\, 0 \leq x < 1 \\ u_3, & \forall\, x \geq 1 \end{cases}.$$

5. A quelle condition a-t-on une solution continue pour $t > 0$?
6. Calculer la solution lorsque $u_1 = u_3 = 0$ et $u_2 = 1$. Tracer les caractéristiques dans le plan (x, t) et la solution à différents temps.
7. Calculer la solution lorsque $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$. Tracer les caractéristiques dans le plan (x, t) et la solution à différents temps.

Exercice 3.

Soit $I =]0, 1[$. Soit $a \in C([0, 1])$ une fonction strictement positive. Soit $T \in H^{-1}(I)$. On se propose de résoudre le problème

$$\begin{cases} -(au')' + e^u = T & \text{dans } \mathcal{D}'(I) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Ici :

- une solution faible de (3) est une fonction u telle que : $u \in C([0, 1])$, $u(0) = u(1) = 0$, $u' \in L^1_{loc}(I)$, et $(au')(\varphi') + (e^u)(\varphi) = T(\varphi)$, $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(I)$;
- si $T = T_f$, où $f \in C(\overline{I})$, alors une solution forte (ou classique) de (3) est une fonction u telle que : $u \in C^1([0, 1])$, $u(0) = u(1) = 0$, $au' \in C^1([0, 1])$ et $(au')' = e^u - f$.

Le but du problème est de montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible de (3). Les questions 1)-4) sont destinées à montrer l'existence d'une solution faible. Les questions 6)-8) mènent à l'unicité de cette solution. La question 5) a trait à la régularité de la solution faible.

Soit $J : H_0^1(I) \to \mathbb{R}$, donnée par $J(u) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 a(x)(u')^2(x)\, dx + \int_0^1 e^{u(x)}\, dx - T(u)$. Montrer que :

1. J est bien définie.
2. J est strictement convexe.
3. J a exactement un point de minimum.
4. Si u est un point de minimum de J, alors u est solution faible de (3).
5. Si $T = T_f$, avec $f \in C([0, 1])$, alors u est solution forte de (3).
6. Montrer que, pour tout $U \in H^{-1}(I)$, il existe une unique solution faible $v \in H_0^1(I)$ de $-(av')' = U$.
7. En déduire que, si u est solution faible de (3), alors $u \in H_0^1(I)$.
8. En déduire que (3) a exactement une solution faible.