Mathématiques Générales première année Année 2009-2010
Introduction aux équations aux dérivées partielles

Partiel du 15 mars 2010. Durée : deux heures

Exercice 1

Soit $P(\partial)$ l'opérateur différentiel associé à l'équation (E) $-u'' + u = f$, c'est-à-dire $P(\partial) = -\partial^2 + 1$.

a) Montrer que $E(x) := \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, est solution fondamentale de $P(\partial)$.

b) En déduire que, si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors (E) a une solution, notée dans la suite u_f, dont on donnera l'expression explicite.

Exercice 2

Une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est *harmonique* si $\Delta u = 0$. On rappelle la formule de la moyenne pour des fonctions harmoniques : $u(x) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B(x,R)} u(z)\, dz$, $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$.

a) On suppose u harmonique et positive. En comparant $\int_{B(x,R)} u$ et $\int_{B(y,R+|x-y|)} u$, montrer que $u(x) \le \frac{(R+|x-y|)^n}{R^n} u(y)$.

b) En déduire le *théorème de Liouville* : si $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est harmonique et minorée, alors u est constante.

Exercice 3

a) Rappeler la forme des rotations $\mathscr{R}$ du plan qui laissent invariante l'origine.

b) Montrer que, si $u \in C^2$ et $\mathscr{R}$ est comme dans la question précédente, alors $\Delta(u \circ \mathscr{R}) = (\Delta u) \circ \mathscr{R}$.

c) En déduire que, si le problème $\begin{cases} \Delta u = f(|x|) & \text{dans } B \\ u = 0 & \text{sur } \partial B \end{cases}$ a une solution, où B est le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et $u \in C^2(\overline{B})$, alors forcément u ne dépend que de $|x|$.

Exercice 4

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Calculer, à l'aide de la méthode des caractéristiques, la solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + x\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = t\, u(t,x) + g(t,x), \quad \forall\, t > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

et telle que $u|_{t=0} = f$.

Exercice 5

Nous admettons dans la suite le résultat suivant : la suite $(\sqrt{2}\sin(n\pi x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base orthonormée de $L^2(0,1)$.
Soient $I=]0,1[$, $f\in C_0^0(I,\mathbb{C})$. On souhaite résoudre l'équation de Shrödinger

$$\begin{array}{l} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \forall\, t>0, \forall\, x\in I, \\ u(t,0)=u(t,1)=0,\ \forall\, t>0, \end{array} \quad (E)$$

avec la donée initiale $u(0,x)=f(x)$, $\forall\, x\in I$.

a) On cherche une solution de (E) sous la forme $u(t,x)=\psi(t)\phi(x)$, où ϕ satisfait $\phi(0)=\phi(1)=0$. Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que
$$i\,\psi'(t)=\lambda\psi(t), \quad -\phi''(x)=\lambda\phi(x).$$

b) Montrer que
$$\int_0^1 |\phi'(x)|^2 = \lambda\int_0^1 |\phi(x)|^2 dx$$
et en déduire que $\lambda\in\mathbb{R}$.

c) Montrer qu'il existe $(\lambda_n)\subset\mathbb{R}$, et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tels que $e_n(0)=e_n(1)=0$, les $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une base hilbertienne de $L^2(0,1)$ et
$$-e_n''(x)=\lambda_n e_n(x),\ \forall\, x\in I.$$

d) Calculer une solution formelle de (E) avec la donnée initiale $u(0,\cdot)=f$.

e) On suppose que les coefficients $f_n=(f,e_n)$ du développement de f vérifient $f_n=O(n^{-\alpha})$ avec $\alpha>3$. Montrer que u est de classe C^1 en temps et C^2 en espace et vérifie (E).