Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles

Examen du 24 juin 2010 -durée : deux heures trente-

Exercice 1.

Soient $f \in C^1([0,\infty[)$, $g \in C([0,\infty[)$ et $c > 0$. On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t > 0, \tag{1}$$

avec la condition aux bord $u|_{x=0} = 0$ et les données initiales

$$u|_{t=0} = f, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g.$$

1. Y a-t-il une condition de compatibilité à imposer aux données initiales ?
2. En posant $w = \partial_t u + c\partial_x u$, réduire (1) à un système d'équations différentielles du premier ordre portant sur (u, w). On précisera les conditions initiales sur u, w.
3. Déterminer w puis u (on pourra utiliser la méthode des caractéristiques).

Exercice 2.

On souhaite résoudre le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t > 0, \tag{2}$$

avec la donnée initiale $u|_{t=0} = \chi_{]0,1[}$.

1. Rappeler les conditions de choc de Rankine-Hugoniot et les conditions d'entropie pour l'équation (2).

2. Rappeler la forme des ondes de raréfaction pour (2).
3. Ecrire le système des caractéristiques pour (2) et montrer que celles-ci sont des droites.
4. Résoudre (2) avec la condition initiale donnée : on représentera la solution dans le plan des caractéristiques (x, t) et également le graphe $x \mapsto u(x, t)$ pour différents temps t où la solution u change de forme.

Exercice 3.

On rappelle l'*injection de Morrey* suivante :

si $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ est un ouvert borne de classe C^∞, alors $H^3(\Omega) \subset C^\alpha(\overline{\Omega}), \forall\, 0 < \alpha < 1$.

Dans la suite, on se donne $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ un ouvert borné de classe C^∞ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $|f'(x)| \leq C < \infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

1. Montrer que la fonctionnelle $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $J(u) := \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx - \int_\Omega F(u(x))\, dx$, est bien définie.
2. Montrer que, si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $f(u) \in H^{-1}(\Omega)$.
3. Montrer que, si u est un point de minimum de J, alors u est solution, au sens des distributions, de $(P) \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$.
4. (Question plus difficile) Montrer que, si $u \in C_0^\infty(\Omega)$, alors $f(u) \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que cette conclusion reste vraie pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.
5. En déduire que, si u est solution de (P), alors $u \in H^3(\Omega)$, puis que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall\ 0 < \alpha < 1$.