Université Lyon 1 Année 2010-2011
Master Mathématiques Générales 1ère année
Introduction aux équations aux dérivées partielles

Devoir Maison 1

Exercice 1. (*Intégration par parties dans $\mathbb{R}^n$*)

Soit $n \geq 2$. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $\vec{\nu}$ la normale extérieure au bord $\partial\Omega$. Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$. Montrer que pour tout $j = 1 \dots n$,

$$\int_\Omega u\,\partial_j v\,dx = -\int_\Omega (\partial_j u)\,v\,dx + \int_{\partial\Omega} uv\,\nu_j\,d\mathscr{H}^{n-1}$$

Indication. Trouver un champ $\vec{f}$ tel que div $\vec{f} = u\,\partial_j v + (\partial_j u)\,v$.

Exercice 2. (*Identité de Pohozaev*)
Soit $n \geq 2$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1, $\vec{\nu}$ la normale extérieure au bord $\partial\Omega$.

Notations.
Si $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et $x \in \partial\Omega$, on note par
- $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x)$ la "dérivée normale" de u au point x
- $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}(x) = \nabla u(x) - \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,\nu(x)$ le "gradient tangentiel" de u au point x. Autrement dit : $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$ est la projection orthogonale de ∇u sur $\nu^\perp$.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ telle que $\Delta u = f'(u)$ dans $\overline{\Omega}$.

a) *Préliminaire 1.* Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \Omega$
$$\mathrm{div}\big(xg(x)\big) = ng(x) + x \cdot \nabla g(x).$$
En déduire que
$$\int_\Omega x \cdot \nabla g(x)dx = -n\int_\Omega g(x)dx + \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu(x)g(x)d\mathscr{H}^{n-1}(x).$$

b) *Préliminaire 2.* Montrer que pour tout $x \in \Omega$, $|\nabla u(x)|^2 = \left|\dfrac{\partial u}{\partial \tau}(x)\right|^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x)\right)^2$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_\Omega \Delta u(x)\,x \cdot \nabla u(x)dx = \int_\Omega f'(u(x))\,x \cdot \nabla u(x)dx$, où on a noté $x \cdot \nabla u(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j \partial_j u(x)$.

d) Montrer que
$$\begin{aligned}\int_\Omega f'(u(x))\,x \cdot \nabla u(x)dx &= \int_\Omega x \cdot \nabla\big(f(u(x))\big)dx \\ &= -n\int_\Omega f(u(x))dx + \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu(x)f(u(x))d\mathscr{H}^{n-1}(x).\end{aligned}$$

e) Montrer que
$$\int_\Omega \Delta u(x)\,x \cdot \nabla u(x)dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,x \cdot \nabla u(x)d\mathscr{H}^{n-1} - \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla\Big(x \cdot \nabla u(x)\Big)dx.$$

f) Montrer que $\nabla u(x)\cdot\nabla\Big(x\cdot\nabla u(x)\Big) = |\nabla u(x)|^2 + \dfrac{1}{2}x\cdot\nabla\big(|\nabla u(x)|^2\big)$.

g) Montrer que $\displaystyle\int_\Omega x\cdot\nabla\big(|\nabla u(x)|^2\big)dx = -n\int_\Omega |\nabla u(x)|^2dx + \int_{\partial\Omega} x\cdot\nu(x)|\nabla u(x)|^2 d\mathscr{H}^{n-1}(x)$.

h) A l'aide de tous les résultats précédents, obtenir l'*identité de Pohozaev*

$$\frac{n-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2dx + n\int_\Omega f(u(x))dx$$
$$= \int_{\partial\Omega}\left\{x\cdot\nu(x)f(u(x)) - \frac{1}{2}x\cdot\nu(x)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right)^2 + \frac{1}{2}x\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u}{\partial\tau}(x)\right|^2 - \frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,x\cdot\frac{\partial u}{\partial\tau}(x)\right\}d\mathscr{H}^{n-1}(x).$$

i) *Application.* Dans cette question, Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $u\in C^2(\overline{B}(0,1))$ est solution du problème suivant

$$\begin{cases}\Delta u = u^3 & \text{dans } B(0,1)\\ u=0 & \text{sur } S(0,1)\end{cases}.$$

i) Montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial\tau}(x) = 0$ pour tout $x\in S(0,1)$.

ii) Montrer que

$$\frac{n-2}{2}\int_{B(0,1)}|\nabla u(x)|^2dx + \frac{n}{4}\int_{B(0,1)}u(x)^4dx + \frac{1}{2}\int_{S(0,1)}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 d\mathscr{H}^{n-1}(x) = 0.$$

iii) En déduire que u est identiquement nulle sur $\overline{B}(0,1)$.

Exercice 3. (*Solution fondamentale du laplacien*)
Dans cet exercice, on va montrer que Γ_n définie ci-dessous est solution fondamentale de l'équation de Laplace, par une méthode légèrement différente de celle vue en TD (Feuille 2 Exercice 5).

Notations.

Soit $n\geq 2$. On note $\Gamma_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\Gamma_n(x) = \begin{cases}\frac{1}{2\pi}\ln|x|, & \text{si } n=2\\ -\frac{1}{(n-2)\sigma_n}|x|^{2-n}, & \text{si } n\geq 3\end{cases}$.

Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, pour tout $r>0$, on note $\bar{f}(r)$ sa moyenne sur la sphère $S(0,r)$ (quand cette définition a un sens) :

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\int_{S(0,r)} f(x)d\mathscr{H}^{n-1}(x).$$

a) Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que pour tout $r>0$,

$$\int_{B(0,r)} f(x)dx = \int_0^r \sigma_n\rho^{n-1}\bar{f}(\rho)d\rho.$$

b) Soit $\varphi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.

i) Montrer que $\dfrac{d\bar{\varphi}}{dr}(r) = \dfrac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\displaystyle\int_{B(0,r)}\Delta\varphi(x)\,dx$ pour tout $r>0$.

ii) A l'aide de a), en déduire que pour tout $r>0$, $\displaystyle\int_0^r \rho^{n-1}\overline{\Delta\varphi}(\rho)d\rho = r^{n-1}\frac{d\bar{\varphi}}{dr}(r)$ puis

$$\overline{\Delta\varphi}(r) = \Delta(\bar{\varphi})(r) = \frac{d^2\bar{\varphi}}{dr^2}(r) + \frac{n-1}{r}\frac{d\bar{\varphi}}{dr}(r).$$

c) Montrer que pour tout $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\langle\Delta\Gamma_n,\varphi\rangle = \sigma_n\displaystyle\int_0^{+\infty}\bar{\Gamma}_n(r)r^{n-1}\Delta(\bar{\varphi})(r)dr$.

d) En déduire que $\Delta\Gamma_n = \delta$.