Université Lyon 1 Année 2010-2011
Master Mathématiques Générales 1ère année
Introduction aux équations aux dérivées partielles

Devoir Maison 2

Le Laplacien a, dans $\mathbb{R}^3$, une solution fondamentale de la forme $\dfrac{c}{|x|}$. Nous allons généraliser ce résultat, en montrant qu'un opérateur **elliptique** et **homogène** d'ordre inférieur à la dimension de l'espace admet une solution fondamentale homogène.

1. Notations et quelques calculs

a) Ω, ω sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Ω contient 0.

b) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $t > 0$, on pose $f_t(x) = \dfrac{1}{t^n} f(x/t)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

c) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on pose :

   i) $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots \alpha_n$

   ii) $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$

   iii) $\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$

   iv) $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial_n^{\alpha_n}$

   v) Par ailleurs, $\beta \leq \alpha$ signifie $\beta_i \leq \alpha_i$, $i = [\![1, n]\!]$.

   vi) Si $\beta \leq \alpha$, alors $\left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}\right) := \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}$

d) Montrer la généralisation, à n dimensions, de la formule de Leibniz dans $\mathbb{R}$:

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}\right) \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g, \text{ si } f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$$

(formule de Faà di Bruno).

e) Montrer que, si $f \in C^{k+1}(\Omega)$, alors

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0) x^\alpha + O(|x|^{k+1}) \text{ quand } x \to 0.$$

f) Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $f \in C^{k+1}(\Omega)$ et $\partial^\alpha f(0) = 0$, $|\alpha| \leq k$, montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_\Omega |\varepsilon^n \partial^\alpha(\psi_\varepsilon f)| = 0, \quad |\alpha| \leq k.$$

2. Support d'une distribution. Théorème de Schwartz sur les supports

a) Soit $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Si $\omega \subset \Omega$, alors, par définition, $u = 0$ dans ω si $u(\varphi) = 0$ pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$. On définit alors $\operatorname{supp} u = \Omega \setminus \bigcup_{u=0 \text{ dans } \omega} \omega$.

b) On suppose que $u = \sum_{\text{finie}} c_\alpha \partial^\alpha \delta$. Montrer que $\operatorname{supp} u \subset \{0\}$. La réciproque (théorème de Schwartz) est vraie ; nous allons la montrer ci-dessous.

c) On suppose que $\operatorname{supp} u = K \Subset \Omega$. Soit $L \Subset \Omega$ un voisinage compact de K. Montrer qu'il existe C et k tels que

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_L |\partial^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

d) En déduire que, si supp $u \subset \{0\}$ et si $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ est telle que $\partial^\alpha \varphi(0) = 0$, $|\alpha| \leq k$, alors $u(\varphi) = 0$.

e) En déduire qu'il existe $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq k$, tels que $u = \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial^\alpha \delta$.

3. Distributions homogènes

a) La définition des distributions homogènes s'intuite de la manière suivante : si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est (positivement) homogène d'ordre a, c'est-à-dire si $f(tx) = t^a f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $t > 0$, alors $T_f(\varphi_t) = t^a T_f(\varphi)$, $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Par définition, si $a \in]-n, 0[$, $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est homogène d'ordre a si $u(\varphi_t) = t^a u(\varphi)$, $\forall\, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.[1] Dans la suite, on prend toujours $a \in]-n, 0[$.

b) Si $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est continue et homogène d'ordre a, montrer que $f \in L^1_{loc} \cap \mathscr{S}'$. Montrer que, dans ce cas, f (c'est-à-dire T_f) est une distribution homogène d'ordre a.

c) Si $u \in \mathscr{S}'$ est homogène d'ordre a, montrer que $\mathscr{F}u$ est homogène d'ordre $-a-n$.

d) Montrer que, si $u = \displaystyle\sum_{\text{finie}} c_\alpha \partial^\alpha \delta$ est homogène d'ordre a, alors $u = 0$.

4. Opérateurs elliptiques homogènes

a) Un opérateur d'ordre m, $P(\partial) = \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$, est homogène si $P(\partial) = \displaystyle\sum_{|\alpha| = m} c_\alpha \partial^\alpha$ (c'est-à-dire, tous les termes sont d'ordre maximal). Un tel opérateur est elliptique si $P(\xi) = \displaystyle\sum_{|\alpha| = m} c_\alpha \xi^\alpha \neq 0$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

b) Etudier l'ellipticité des opérateurs homogènes suivants : $\partial_{\bar{z}} = \dfrac{1}{2}(\partial_1 + \imath \partial_2)$ $(n = 2)$, Δ, $\Box = \partial_t^2 - \Delta_x$.

c) On suppose $n \geq 3$. Montrer que, si P est elliptique homogène, alors m est pair.[2]

5. Existence d'une solution fondamentale homogène

a) Dans toute cette partie, P est elliptique homogène d'ordre $m < n$. Montrer que $\xi \mapsto u(\xi) := \dfrac{1}{P(\imath\xi)}$ définit un distribution homogène d'ordre $-m$. On pose alors $v := \mathscr{F}^{-1}u$.

b) Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi = 1$ au voisinage de 0. On décompose alors $u = \underbrace{\psi u}_{u_1} + \underbrace{(1-\psi)u}_{u_2}$ et on pose $v_j = \mathscr{F}^{-1}u_j$. Montrer que $v_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

c) Montrer que $\partial^\beta(x^\alpha u_2) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si $|\beta| > n - m + |\alpha|$. En déduire que, pour des tels α et β, on a $\partial^\alpha(\xi^\beta v_2) \in C(\mathbb{R}^n)$, puis que $v_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$.

d) Soit f la fonction définie par la restriction de v à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Montrer que $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

e) Montrer que $v = T_f$.

f) En déduire que $P(\partial)$ admet une solution fondamentale donnée par une fonction homogène f de degré $m - n$, et qui est C^∞ en dehors de l'origine.

---

1. C'est une définition plus restrictive que celle du livre de Hörmander, mais elle suffit pour ce qui suit.

2. On pourra utiliser le théorème des antipodes (théorème de Borsuk-Ulam) : si $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{R}^k$ est continue, alors