Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2010-2011

Examen du 30 mai 2011. Durée : 3 heures

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. (*Equation de Laplace avec condition de Neumann*)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de classe C^1, borné et connexe. En tout point $x \in \partial\Omega$, on note $\vec{n}(x)$ la normale extérieure unitaire. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème suivant

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases},$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = \nabla u(x) \cdot \vec{n}(x)$ est la dérivée normale en $x \in \partial\Omega$.

On admet provisoirement le fait suivant :

$$(2) \qquad u \in H^1(\Omega), \nabla u = 0 \Longrightarrow u = \text{cste p. p.}$$

On définit l'espace

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega); \int_\Omega u = 0 \right\}.$$

a) Le but de cette question est de montrer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger :

(3) il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in V$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

On raisonne par l'absurde. Supposons que (3) n'est pas vérifiée.

i) Montrer qu'il existe une suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de V telle que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\|u_j\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et $\|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \dfrac{1}{j}$.

ii) Aboutir à une contradiction (on pourra utiliser le théorème de Rellich-Kondratchov).

b) On dit que $u \in H^1(\Omega)$ est solution faible de (1) si pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx.$$

i) Montrer que si (1) admet une solution faible u, alors $\displaystyle\int_\Omega f dx = 0$.

ii) Montrer que V est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.

iii) Montrer qu'il existe un unique $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$,
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx.$$

iv) On suppose dans la suite que $\displaystyle\int_\Omega f dx = 0$. Montrer que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx.$$

v) Montrer que les solutions faibles de (1) sont les fonctions $u + c$, $c \in \mathbb{R}$.

c) (Question plus difficile) On montre (2).

i) Montrer u sous l'hypothèse supplémentaire $u \in C^\infty(\Omega)$.

ii) Sans cette hypothèse : calculer Δu et conclure.

Exercice 2. (*Méthode des caractéristiques*)

a) En utilisant la méthode des caractéristiques, montrer que les solutions de classe C^1 de l'équation
$$\partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0, \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
sont de la forme $u(x,y) = f(ye^{x^2/2})$, où f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0, & \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) = y^2, & \forall\ y \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

c) Est-il possible de résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0, & \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = x^2 & \forall\ x \in \mathbb{R} \end{cases} ?$$

Exercice 3. (*Equation de la chaleur semi-linéaire*) On considère le problème suivant
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = G(u) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) = 0 \end{cases}, \tag{4}$$

avec $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Rappels. Soit

$$X = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; f \text{ continue et bornée}\}$$

Muni de la norme $\| \ \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, X est un espace de Banach .[1]

On pose $P(x) = \dfrac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/4}$ et

$$S(0)f(x) = f(x), \ S(t)f(x) = P_{\sqrt{t}} * f(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Si $f \in X$, alors $S(t)f \in X$ et l'application

$$[0, +\infty) \ni t \mapsto S(t)f \in X$$

est continue.

Moyennant des hypothèses sur $F(x,t)$, "la" solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = F & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) = 0 \end{cases}, \tag{5}$$

est donnée par la formule de Duhamel

$$u(x,t) = \int_0^t S(t-s)F(\cdot, s)(x)\, ds, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Afin de faciliter la compréhension de ce qui suit, nous allons écrire autrement cette formule : on pose $v(t) = u(\cdot, t)$ et $H(t) = F(\cdot, t)$.[2] Alors la formule de Duhamel peut se récrire

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)H(s)\, ds.$$

Formulation du problème. La formule (6) suggère la définition suivante : u est solution faible de (4) si

$$u(x,t) = \int_0^t S(t-s)G(u(\cdot, s))(x)\, ds, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

La suite du problème est consacrée à la preuve du résultat suivant : si G est Lipschitzienne, alors (7) a une solution dans un espace convenable.

a) Soit K la constante de Lipschitz de G. Soit $M > K$. Soit

$$Y = \{v \in C([0, +\infty), X); v(0) = 0, \exists\, C \text{ t. q. } \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Ce^{Mt}, \forall\, t \geq 0\},$$

muni de la norme

$$\|v\| = \inf\{C > 0; \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Ce^{Mt}, \forall\, t \geq 0\} = \sup_{t \geq 0} e^{-Mt} \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

1. X est communément noté $C_b(\mathbb{R}^n)$.
2. Donc, à t fixé, v et H sont des fonctions de x.

Montrer que Y est un espace de Banach.

b) (Question difficile)

   i) Si $f \in X$, montrer que $S(t)f \in X$, $\forall\, t$.

   ii) Si $v \in C([0, +\infty); X)$, montrer que $\displaystyle\int_0^t S(t-s)v(s)\, ds \in X$, $\forall\, t$, et que
$$[0, +\infty) \ni t \mapsto \int_0^t S(t-s)v(s)\, ds$$
   est dans $C([0, +\infty); X)$.

c) Soit
$$Tv(t) = \int_0^t S(t-s)G(v(s))\, ds, \quad v \in Y.$$
Montrer que $T : Y \to Y$.

d) En utilisant le théorème du point fixe de Picard, montrer que (7) admet une solution dans Y.