Mathématiques Générales première année — Année 2010-2011

Introduction aux équations aux dérivées partielles

Partiel du 14 mars 2011. Durée : deux heures

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1. (*Calculs de transformées de Fourier*)

Dans la suite, $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}, & \text{si } r \in]-1,1[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit C le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. On définit $u : \mathscr{S}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$, $u(\varphi) = \displaystyle\int_C \varphi \, d\mathscr{H}^1$, $\forall\, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$.

a) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$, et que pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\rho) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-\imath\rho\cos t} dt$.

b) Montrer que pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$, $|u(\varphi)| \leq 2\pi \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^2} |\varphi(x)|$. En déduire que $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$.

c) Montrer que $\hat{u} = T_g$, où $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2\hat{f}(|x|)$. [Indication : dans l'intégrale définissant $\hat{\varphi}$, faire le changement de variables polaires : $x = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, avec $\rho = |x|$.]

Exercice 2. (*Polynômes harmoniques homogènes*)

Notations. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, on note $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x^\alpha = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}$.
- $\mathscr{P}$ est l'ensemble des fonctions polynomiales et harmoniques de n variables : un élément P de $\mathscr{P}$ est de la forme $P(x) = \displaystyle\sum_{finie} c_\alpha x^\alpha$ avec $c_\alpha \in \mathbb{R}$ et vérifie $\Delta P = 0$. On munit $\mathscr{P}$ des opérations usuelles.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_k$ est l'ensemble des fonctions polynomiales harmoniques homogènes de degré k : un élément de $\mathscr{P}_k$ est de la forme $P(x) = \displaystyle\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha$.

  On admettra le fait que chaque $\mathscr{P}_k$ est de dimension finie et que l'espace engendré par tous les $\mathscr{P}_k$ est $\mathscr{P}$.
- On note B la boule unité dans $\mathbb{R}^n$, $S(0,r)$ la sphère centrée en 0 de rayon r (pour la norme euclidienne standard).

– On définit, sur $\mathscr{P}$, la forme bilinéaire et symétrique

$$(P,Q) \mapsto P \cdot Q = \int_B P\,Q.$$

On admettra que cette forme définit un produit scalaire sur l'espace $\mathscr{P}$.

a) Si $P \in \mathscr{P}_k$, montrer que $P(tx) = t^k P(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

b) En déduire l'identité d'Euler : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \partial_j P(x) = kP(x)$, $\forall\, P \in \mathscr{P}_k$.

c) Soient : $r > 0$, $P \in \mathscr{P}_k$, $Q \in \mathscr{P}_l$. A partir de l'égalité

$$0 = \int_{B(0,r)} (P\Delta Q - Q\Delta P),$$

montrer l'égalité $(k-l)\displaystyle\int_{S(0,r)} P\,Q = 0$.

d) En déduire que, si pour P et Q ci-dessus, on a $k \neq l$, alors $P \cdot Q = 0$.

e) En déduire que $\mathscr{P}_k \perp \mathscr{P}_l$ si $k \neq l$, puis que $\mathscr{P}$ admet une base orthonormée formée de polynômes harmoniques homogènes.

Exercice 3. (*Une autre preuve de la formule d'inversion de Fourier dans* $\mathbb{R}$)

– On rappelle que $\widehat{e^{-ax^2}}(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\xi^2/4a}$. En particulier, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.

– *On admettra le fait suivant : si $f \in L^1 \cap C(\mathbb{R})$, alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-y^2/(4\varepsilon)} f(x-y)\,dy = f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}\; g = \int_{\mathbb{R}} f\hat{g}. \tag{1}$$

b) En utilisant (1) avec $g(\xi) = \dfrac{1}{2\pi}e^{\imath x\xi}e^{-\varepsilon\xi^2}$ ($x \in \mathbb{R}$ fixé), obtenir le résultat suivant : si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, et si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{\imath x\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Exercice 4. (*Equation de transport sur une demi-droite*)
On considère l'équation de transport suivante, posée sur la demi-droite $x \geq 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u(t,x) + c\,\partial_x u(t,x) = 0, \quad t \geq 0,\ x \geq 0, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \geq 0, \\ u(t,0) = 0,\ t \geq 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

où c est une constante réelle non nulle, et u_0 une fonction donnée.

On suppose que u_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, et que $u_0(0) = u_0'(0) = 0$.

On introduit les courbes caractéristiques $X(t,x)$ et $\widetilde{X}(t,t_0)$ définies comme solutions des équations différentielles

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t X(t,x) = c \\ X(0,x) = x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \partial_t \widetilde{X}(t,t_0) = c \\ \widetilde{X}(t_0,t_0) = 0 \end{array}\right.$$

a) Pourquoi doit-on faire l'hypothèse $u_0(0) = 0$?

b) Montrer que $X(t,x)$ (respectivement $\widetilde{X}(t,t_0)$) est bien définie pour tout $x \geq 0$ (resp. $t_0 \geq 0$), tout $t \geq 0$ et donner son expression. Dessiner ces courbes dans le plan (x,t).

c) On suppose $c > 0$. A l'aide des caractéristiques définies ci-dessus, montrer qu'il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ au problème (2).

d) On suppose $c < 0$.

   i) On suppose que u_0 est à support compact inclus dans $[1,2]$. Montrer que pour $T > 0$ assez petit, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R}^+)$ au problème (2). Quel est le temps maximal T^* d'existence ? Expliquer pourquoi on ne peut pas résoudre le problème au delà de T^*.

   ii) Donner un exemple de donnée initiale u_0 pour laquelle il n'existe pas de solution au problème (2), même en temps petit.