Université Lyon 1 Année 2011-2012
Master Mathématiques Générales $1^{\text{ère}}$ année
Introduction aux équations aux dérivées partielles

Devoir Maison 1. Transformée de Fourier. Coordonnées sphériques

– à rendre le 27 février 2012 –

Exercice 1. (*Théorème d'inversion de Fourier. Extrait du partiel 2010-2011*)

1.

Hypothèse. $f \in L^1 \cap C(\mathbb{R})$.
Conclusion.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-y^2/(4\varepsilon)} f(x-y)\, dy = f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. [Indication : découper l'intégrale.]

2.

Hypothèse. $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.
Conclusion.

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}\, g = \int_{\mathbb{R}} f \hat{g}. \tag{1}$$

3. En utilisant (1) avec $g(\xi) = \frac{1}{2\pi} e^{\imath x \xi} e^{-\varepsilon \xi^2}$ ($x \in \mathbb{R}$ fixé), obtenir le résultat suivant : si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, et si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{\imath x \xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

4. Indiquer la stratégie de preuve du théorème d'inversion dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. (*Coordonnées sphériques généralisées*)

1. En calculant $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx$ de deux façons différentes : en coordonnées sphériques généralisées, respectivement en utilisant le théorème de Fubini, montrer que $\sigma_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$.

2. En calculant $\displaystyle\int_{B(0,1)} \operatorname{div} x\, dx$, montrer que $\omega_n = \dfrac{\sigma_n}{n}$.

Exercice 3. (*Noyau de Poisson dans le demi-espace. Suivant Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, pp. 61-62*) Rappelons que le noyau de Poisson $P(x,t)$ donnant "la" solution du problème $\begin{cases} \Delta u = u_{tt} + \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = f(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$ s'obtient formellement à partir de l'égalité $\mathcal{F}_x P(\cdot, t)(\xi) = e^{-|\xi| t}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire l'identité

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\imath x \xi}}{1+\xi^2}\, d\xi. \tag{2}$$

3. En utilisant (2) et l'identité $\dfrac{1}{1+\xi^2} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(1+\xi^2)t}\, dt$, obtenir l'identité

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} e^{-x^2/(4t)}\, dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

4. En utilisant la question précédente, montrer que la transformée de Fourier de $F_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_a(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$, est donnée par

$$\mathcal{F}F_a(\xi) = \frac{2^n \pi^{(n-1)/2} a}{(a^2 + |\xi|^2)^{(n+1)/2}} \int_0^\infty s^{(n-1)/2} e^{-s}\, ds = \frac{2^n \pi^{(n-1)/2} \Gamma((n+1)/2) a}{(a^2 + |\xi|^2)^{(n+1)/2}}.$$

5. En déduire que $P(x,t) = \dfrac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \dfrac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}$.