DM - Equations de transport - Corrigé

Exercice 1

On utilise les caractéristiques de l'équation de transport linéaire $\partial_t u + c\,\partial_x u = 0$.

Notons pour $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $v(t,x) = u(t, x+ct)$.

Supposons que u soit une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de (1). Alors $\forall t \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) = \partial_t u(t,x+ct) + c\,\partial_x u(t,x+ct) \\ \qquad\qquad\;\; = [u(t,x+ct)]^2 = [v(t,x)]^2 \\ v(0,x) = u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

A x fixé, $t \mapsto v(t,x)$ est solution d'une EDO (non linéaire).

Etudions l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt}(t) = w(t)^2 \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

C'est une équation autonome, le champ $w \mapsto w^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Il assure l'existence et l'unicité d'une solution pour toute donnée initiale w_0, définie sur un intervalle maximal.

Si $w_0 = 0$, la solution est $w \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$

Sinon, $w_0 \neq 0$, $w(t) \neq 0$ pour tout t dans l'intervalle de définition et

$$\frac{w'(t)}{w(t)^2} = 1$$

d'où $\dfrac{1}{w_0} - \dfrac{1}{w(t)} = t$

et $w(t) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{w_0} - t} = \dfrac{w_0}{1 - w_0 t}$

Ainsi, si $w_0 < 0$, la solution est définie pour tout $t \geqslant 0$.

Par contre, si $w_0 > 0$, la solution n'est définie que pour $t < \dfrac{1}{w_0}$.

Revenons maintenant à l'EDP.

1) <u>1er cas</u> : supposons $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et que $u_0 \leq 0$ sur $\mathbb{R}$.

L'analyse précédente nous amène à poser
$$u(t,x) = \frac{u_0(x-ct)}{1-t\,u_0(x-ct)} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On vérifie que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et que u est solution de (1). En effet, u_0 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et comme $u_0 \leq 0$, le dénominateur vérifie $1-tu_0(x-ct) \geq 1$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, donc $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. De plus, $\forall t \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

- $$\partial_t u(t,x) = \frac{\left[-c\,u_0'(x-ct)\left(1-t\,u_0(x-ct)\right) - u_0(x-ct)\left(-u_0(x-ct) - ct\,u_0'(x-ct)\right)\right]}{\left(1-t\,u_0(x-ct)\right)^2}$$
$$= \frac{-c\,u_0'(x-ct) + u_0(x-ct)^2}{\left(1-t\,u_0(x-ct)\right)^2}$$

- $$\partial_x u(t,x) = \frac{u_0'(x-ct)}{\left(1-t\,u_0(x-ct)\right)^2}$$

donc $\partial_t u(t,x) + c\,\partial_x u(t,x) = u(t,x)^2$

De plus, $u(0,x) = u_0(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

L'unicité découle de l'analyse faite via les caractéristiques et du th de Cauchy-Lipschitz pour l'EDO sur $v(t,x)$.

2) <u>2e cas</u> $u_0 \geqslant 0$, $u_0 \not\equiv 0$. Alors $\sup_{\mathbb{R}} u_0 > 0$. On pose $T^* = \dfrac{1}{\sup_{\mathbb{R}} u_0}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$t \longmapsto \frac{u_0(x)}{1 - u_0(x)t}$$ est bien définie sur $\left[0, \dfrac{1}{u_0(x)}\right[$, qui contient $[0, T^*[$.

Comme pour le cas 1), on montre que

$$u(t,x) = \frac{u_0(x-ct)}{1 - t\,u_0(x-ct)}$$ est $\mathcal{C}^1([0,T^*[\times\mathbb{R})$

et satisfait (1).

Et l'unicité sur $[0,T^*[\times\mathbb{R}$ découle de l'analyse faite à l'aide des caractéristiques.

On ne peut pas construire de solution au-delà de T^* (solution régulière) car toute solution coïncide avec celle définie ci-dessus sur $[0,T^*[$ et cette dernière vérifie $\forall t<T^*$,

$$\|u(t,.)\|_{L^\infty_x(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\left|\frac{1}{u_0(x-ct)}-t\right|}$$

$$= \sup_{y\in\mathbb{R}} \frac{1}{\frac{1}{u_0(y)}-t} = \frac{1}{T^*-t}$$

donc $\lim\limits_{t \overset{<}{\to} T^*} \|u(t)\|_{L^\infty_x} = +\infty$.

Exercice 2

1) Supposons $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ solution de (2).
Alors pour tout $t \geq 0$, tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\partial_t \left[u(t, X(t,x)) \right]$$
$$= \partial_t u(t, X(t,x)) + \underbrace{\partial_t X(t,x) \cdot \nabla_x u(t, X(t,x))}$$
$$\left(= \sum_{j=1}^{d} \partial_t X_j(t,x) \, \partial_{x_j} u(t, X(t,x)) \right)$$

$$= \partial_t u(t, X(t,x)) + b(t, X(t,x)) \cdot \nabla_x u(t, X(t,x))$$

$$= 0 \quad \text{car } u \text{ solution de (2)}$$

Ainsi $u(t, X(t,x))$ ne dépend pas de t :
$\forall t \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,
$$u(t, X(t,x)) = u(0, X(0,x)) = u(0,x)$$
$$= u_0(x).$$

2) Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ satisfaisant (3). Par les propriétés rappelées dans l'énoncé, $\forall t$, $x \mapsto X(t,x)$ est un difféo

de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$. Ainsi pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, il existe un unique $y(t,x) \in \mathbb{R}^d$ tel que $x = X(t, y(t,x))$.
Et $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ (théorème des fonctions implicites ; $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$)

On définit $u(t,x) = u_0(y(t,x))$ pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Vérifions que u est solution de (2).

$\forall t \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$\partial_t u(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla_x u(t,x)$$
$$= \nabla u_0(y(t,x)) \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial t}(t,x) + \sum_{j=1}^{d} b_j(t,x) \frac{\partial y}{\partial x_j}(t,x) \right]$$

<u>Remarque</u> • $u_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$

$\nabla u_0(y) \in \mathbb{R}^d$

• $y : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$\frac{\partial y}{\partial t}(t,x), \frac{\partial y}{\partial x_j}(t,x) \in \mathbb{R}^d$

Montrons que $\frac{\partial y}{\partial t}(t,x) + \sum_{j=1}^{d} b_j(t,x) \frac{\partial y}{\partial x_j}(t,x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.

On a $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, $x = X(t, y(t,x))$

donc

$\cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \longrightarrow \quad 0 = \frac{\partial X_j}{\partial t}(t, y(t,x)) + \nabla_x X_j(t,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(t,x) \quad (*)$

$\cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \longrightarrow \quad 1 = \nabla_x X_j(t,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial x_j}(t,x) \quad (**)$

$\forall\, 1 \leq j \leq d$

En utilisant (4) et $(*)$, on obtient $\forall\, 1 \leq j \leq d$,

$$0 = b_j(t, \underbrace{X(t, y(t,x))}_{=x}) + \nabla_x X_j(t,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(t,x)$$

D'où $\quad 0 = b(t,x) + D_x X(t,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(t,x)$

où $D_x X(t,y) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ jacobienne de X /à x en (t,y).

D'autre part, $(**) \Longrightarrow$ (linéarité)

$$b(t,x) = D_x X(t,y) \cdot \left(\sum_{j=1}^{d} b_j(t,x) \frac{\partial y}{\partial x_j}(t,x) \right)$$

Ainsi $D_x X(t,y) \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial t}(t,x) + \sum_{j=1}^{d} b_j(t,x) \frac{\partial y}{\partial x_j}(t,x) \right] = 0$

Or $D_x X(t,y)$ est inversible en tout point (t,y) ($x \longmapsto X(t,x)$ difféo sur $\mathbb{R}^d$ $\forall t$)

donc $\frac{\partial y}{\partial t}(t,x) + \sum_{j=1}^{d} b_j(t,x) \frac{\partial y}{\partial x_j}(t,x) = 0$.

On en déduit que

$$\partial_t u(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla_x u(t,x) = 0 \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

et on a bien $u(0,x) = u_0(y(0,x)) = u_0(x)$.

(En effet, $x = X(0,x)$ donc $y(0,x) = x$.)

L'unicité découle du résultat de la question 1) et de la construction de $y(t,x)$.

3) a) X vérifie $\begin{cases} \partial_t X(t,x) = b(t, X(t,x)) \\ X(0,x) = x \end{cases}$

donc par l'inégalité des accroissements finis,

$$|X(t,x) - \underbrace{X(0,x)}_{= x}| \leq \|b\|_{L^\infty}\, t \qquad \forall t \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

d'où, en remplaçant x par $y(t,x)$ $\big(X(t, \underbrace{y(t,x)}) = x \big)$

$$|x - y(t,x)| \leq \|b\|_{L^\infty}\, t$$

Ainsi $u(t,x)$ ne dépend que des valeurs de $u_0(y)$ pour $|x-y| \leq \|b\|_{L^\infty}\, t$.

b) c) évidents à partir de

$$u(t,x) = u_0(y(t,x)) \quad \forall t \geqslant 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$