Université Lyon 1 Année 2011-2012
Master Mathématiques Générales 1$^{\text{ère}}$ année
Introduction aux équations aux dérivées partielles

Devoir Maison 3. Fonctions holomorphes *vs* fonctions harmoniques

– à rendre le 12 mars 2012 –

Dans l'étude des fonctions holomorphes, un outil important est la formule de Cauchy

$$(1) \qquad u(z) = \frac{1}{2\imath\pi} \int_{C(z_0,R)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \forall\, z \in \mathbb{D}(z_0, R),$$

valide si $u \in \mathrm{Hol}\,(\mathbb{D}(z_0, R)) \cap C(\overline{\mathbb{D}}(z_0, R))$. La formule (1) permet entre autres d'établir l'analyticité des fonctions holomorphes, le principe du maximum, le théorème de Liouville...

Cette démarche s'adapte aux fonctions harmoniques. Le point de départ est la formule de Poisson

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{\sigma_n R} \int_{S(x_0,R)} \frac{u(y)}{|x - y|^n}\, d\sigma(y), \quad \forall\, x \in B(x_0, R).$$

Avec f la restriction de u à $S(x_0, R)$, cette formule donne la solution $u \in C^2(B(x_0, R)) \cap C(\overline{B}(x_0, R))$ du problème

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } B(x_0, R) \\ u = f & \text{sur } S(x_0, R) \end{cases}.$$

Exercice 1. (*Inégalité du gradient*)

1. Soit u la solution de (2). Alors

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{\overline{B}(x_0,R)} |u|.$$

2. Montrer, par récurrence sur $m = |\alpha|$, l'inégalité

$$(3) \qquad |\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{m^m n^m}{R^m} \max_{\overline{B}(x_0,R)} |u|.$$

3. Soit (u_j) une suite de fonctions harmoniques dans Ω, uniformément bornées sur les compacts de Ω : pour tout $K \Subset \Omega$, il existe C_K tel que $|u_j(x)| \leq C_K$, $\forall\, j$, $\forall\, x \in K$. Montrer qu'il existe une sous-suite (u_{j_k})

et une fonction harmonique u telles que $\partial^\alpha u_{j_k} \to \partial^\alpha u$ uniformément sur les compacts, $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Le résultat ci-dessus est un cas particulier du théorème plus général suivant : si $P(\partial)$ a une solution fondamentale E qui soit C^∞ en dehors de 0,[1] alors une suite (u_j) uniformément bornée sur les compacts de solutions de l'équation homogène $P(\partial)u = 0$ satisfait la conclusion du point 3. [**?**, Theorem 4.4.2, p. 110]. On peut remarquer que la solution fondamentale "standard" du laplacien est bien C^∞ en dehors de l'origine.

Exercice 2. (*Les fonctions harmoniques sont analytiques*) Soit u harmonique. Montrer que u est analytique. [Indication : utiliser (3) et la formule de Stirling.] Comment s'énonce le principe des zéros isolés pour les fonctions analytiques ? Conclusion ?

Le résultat ci-dessus est un cas particulier du théorème plus général suivant : si $P(\partial)$ a une solution fondamentale E qui soit analytique en dehors de 0, alors toutes les solutions de l'équation homogène $P(\partial)u = 0$ sont analytiques [**?**, Theorem 4.4.3, p. 111]. Or, la solution fondamentale standard du laplacien est bien analytique dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Exercice 3. (*Un raffinement du principe du maximum*) Soit u harmonique dans un domaine.[2] Si u a un point d'extrémum local x_0, montrer que u est constante. [Indications : montrer que $u = u(x_0)$ au voisinage de x_0. Utiliser le principe des zéros isolés.]

Exercice 4. (*Réciproque à la formule de la moyenne*) Soit $u \in C(\Omega)$ telle que $u(x_0) = \fint_{S(x_0,R)} u$ pour tous $x_0 \in \Omega$ et $0 < R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$.

1. Montrer que $u(x_0) = \fint_{B(x_0,R)} u$ pour tous $x_0 \in \Omega$ et $0 < R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$.
2. En déduire que, pour tous $\omega \sqsubset \Omega$, $\omega \Subset \Omega$, et v harmonique dans ω et continue dans $\overline{\omega}$, la fonction $u - v$ vérifie le principe du maximum dans ω.
3. En déduire que u est harmonique. [Indication : prendre $\omega = B(x_0, R)$, f la restriction de u à $\partial\omega$ et v la solution de (2).]

Exercice 5. (*Inégalités à la Harnack*) Soit u une fonction harmonique et positive dans Ω.

1. On dit alors que $P(\partial)$ est hypoelliptique.
2. Un domaine est un ouvert connexe.

1. Soient $x, y \in \Omega$ et $R > 0$ tels que $B(x,r) \subset B(y,R) \Subset \Omega$. Montrer que

$$u(x) \leq \left(\frac{R}{r}\right)^n u(y). \tag{4}$$

   [Indication : comparer $\displaystyle\int_{B(x,r)} u$ et $\displaystyle\int_{B(y,R)} u$.]

2. *(Théorème de Liouville)* Une fonction harmonique et semi-bornée [3] dans tout $\mathbb{R}^n$ est constante. [Indication : jouer avec r et R.]

3. *(Préliminaires topologiques à l'inégalité de Harnack)*

   i) Soit Ω un ouvert. Soit $K \subset \Omega$ un compact. Soit $0 < R < \dfrac{1}{4}\operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Expliquer pourquoi on peut trouver un nombre fini de boules de taille R telles que : $K \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{M} B(x_i, R)$ et $\overline{B}(x_i, 4R) \subset \Omega$.

   ii) Soit Ω un domaine. Soit $K \subset \Omega$ un compact. Montrer qu'il existe un compact L connexe par lignes polygonales avec $K \subset L \subset \Omega$. [Indication : recouvrir K comme dans la question précédente. Prendre $L = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{M} \overline{B}(x_i, R) \cup \bigcup_{1 \leq i < j \leq M} \gamma_{ij}$, où $\gamma_{ij} \subset \Omega$ est une ligne polygonale de x_i à x_j.]

   iii) *(Question plus difficile)* Soit $\mathcal{C} = \gamma([0,1])$ une courbe compacte de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathcal{C} \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} \omega_i$, où $I = \{1, \ldots, N\}$ chaque ω_i est un ouvert. Montrer qu'il existe $P \leq N+1$ nombres $0 = t_0 < \ldots < t_P = 1$ et des indices $i_j \in \{1, \ldots, N\}$, $j = 0, \ldots, P$, tels que $\gamma(0) \in \omega_{i_0}$ et, pour $1 \leq j \leq P$, $\gamma(t_j) \in \omega_{i_{j-1}} \cap \omega_{i_j}$. [Indication : pour commencer, considérer i_0 tel que $\gamma(0) \in \omega_{i_0}$ et prendre le supremum de l'ensemble $\{t \in [0,1]\,;\, \gamma(t) \in \omega_{i_0}\}$.

4. *(Inégalité de Harnack)* Soit u harmonique et positive dans Ω. Soit $K \Subset \Omega$. Montrer qu'il existe une constante $C = C(K, \Omega)$ telle que

$$\max_K u \leq C \min_K u.$$

   [Indications : remplacer K par L, comme dans la question ii). Recouvrir L comme dans la question i). Soient x, y respectivement un

3. C'est-à-dire majorée ou minorée.

point de maximum et de minimum de u. Considérer une ligne polygonale $\gamma \subset L$ de x à y. En utilisant (4) et la question iii), montrer que $u(x) \leq 4^{Mn} u(y)$, avec M entier ne dépendant que de K et Ω.

Exercice 6. (*Principe des singularités artificielles*) Soit $u : B(0,R) \setminus \{0\}$ harmonique. On suppose u bornée, ou plus généralement $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{u(x)}{E(x)} = 0$, où $E(x) = f(|x|)$ est la solution fondamentale standard du laplacien.

1. Pour commencer, on suppose $u = 0$ sur $S(0, R/2)$. En appliquant le principe du maximum sur $B(0, R/2) \setminus \overline{B}(0, \delta)$ et en faisant $\delta \to 0$, montrer que $u(x) \leq \varepsilon(f(R/2) - E(x))$ dans $B(0, R/2) \setminus \{0\}$, $\forall\, \varepsilon > 0$. En déduire que $u = 0$ dans $B(0, R/2) \setminus \{0\}$.
2. Sans supposer $u = 0$ sur $S(0, R/2)$, en déduire le principe des singularités artificielles : u admet un prolongement par continuité en 0, et le prolongement est harmonique dans $B(0, R)$.

Exercice 7. (*Principe de symétrie de Schwarz*) Si $A \subset \mathbb{R}^n$, on note $A_+ = \{x = (x', x_n) \in A\,;\, x_n > 0\}$.

1. Soit $f \in C(S(0,R))$ impaire en x_n, c'est-à-dire telle que $f(x', -x_n) = -f(x', x_n)$, $\forall\,(x', x_n) \in S(0, R)$. Montrer que la solution de (2) est impaire en x_n.
2. En déduire le principe de Schwarz : si $u \in C(\overline{R^n_+})$ est harmonique dans $\mathbb{R}^n_+$ et vaut 0 sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, alors son prolongement par imparité :
$$v(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & \text{si } x_n \geq 0 \\ -u(x', -x_n), & \text{si } x_n < 0 \end{cases}$$
est harmonique.