Mathématiques Générales 1e année

2011–2012

Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles

Corrigé du devoir n° 3

Exo 1

1. En dérivant sous le signe $\int$ dans la formule de Poisson, on trouve

$$\nabla u(x) = \frac{-2(x-x_0)}{\sigma_n R} \int_{S(x_0,R)} \frac{u(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma(y)$$

$$- \frac{n(R^2-|x-x_0|^2)}{\sigma_n R} \int_{S(x_0,R)} \frac{u(y)\,(x-y)}{|x-y|^{n+2}}\, d\sigma(y), \quad \forall x \in B(x_0,R),$$

et en particulier

$$\nabla u(x_0) = -\frac{nR}{\sigma_n} \int_{S(x_0,R)} \frac{u(y)\,(x_0-y)}{|x_0-y|^{n+2}}\, d\sigma(y)$$

$$= -\frac{n}{\sigma_n R^{n+1}} \int_{S(x_0,R)} u(y)\,(x_0-y)\, d\sigma(y).$$

Ceci implique

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{\sigma_n R^{n+1}} \mathcal{H}^{n-1}(S(x_0,R)) \max_{S(x_0,R)} |u(y)|\,|x_0-y| =$$

$$\frac{n}{R} \max_{S(x_0,R)} |u(y)| \leq \frac{n}{R} \max_{B(x_0,R)} |u|. \qquad \square$$

$\boxed{2.}$ Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $m = |\alpha| \geq 2$. Alors il existe $\beta \in \mathbb{N}^n$, $j \in [\![1, n]\!]$ tels que $\alpha = \beta + e_j$. En supposant (3) vraie au rang $m-1$, et en notant que $\partial^\beta u$ est harmonique dans $B(x_0, R)$, on trouve, pour $0 < \rho < R$:

$$|\partial^\alpha u(x_0)| = |\partial_j \partial^\beta u(x_0)| \leq \frac{n}{\rho} \max_{\overline{B}(x_0,\rho)} |\partial^\beta u| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hypothèse de} \\ \text{récurrence}}}{\leq}$$

$$\frac{n}{\rho} \max_{\substack{\overline{B}(x, R-\rho) \\ x \in \overline{B}(x_0,\rho)}} |u| \frac{(m-1)^{m-1} n^{m-1}}{(R-\rho)^{m-1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } \bigcup_{x \in \overline{B}(x_0,\rho)} B(x, R-\rho) \subset \overline{B}(x,R)}}{\leq}$$

$$\frac{n (m-1)^{m-1} n^{m-1}}{\rho (R-\rho)^{m-1}} \max_{\overline{B}(x_0,R)} |u|.$$

Cette inégalité est la plus intéressante quand $\rho (R-\rho)^{m-1}$ est maximale, ce qui revient à $\rho = \frac{R}{m} < R$

On trouve

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n^m}{R^m} \max_{\overline{B}(x_0,R)} |u|.$$

Le cas $m=1$ étant établi dans la question précédente, la preuve par récurrence est complète. $\square$

$\boxed{3.}$ $\boxed{\text{Préliminaires}}$

a) Un corollaire (à connaître absolument) du théorème d'Arzelà-Ascoli :

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
- $(u_j) \subset C^1(\Omega)$
- $\begin{cases} |u_j| \leq C_K \\ |\nabla u_j| \leq C_K \end{cases}$ sur $K \subset\subset \Omega$, $\forall j$

Alors (u_j) contient une sous-suite (u_{j_k}) qui converge uniformément sur les compacts.

b) Une variante plus élaborée du résultat ci-dessus :

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
- $(u_j) \subset C^l(\Omega)$
- $|\partial^\alpha u_j| \leq C_{K,\alpha}$ sur $K \subset\subset \Omega$, $\forall j$, $\forall \alpha$ tel que $|\alpha| \leq l$.

Alors $\exists$ une sous-suite (u_{j_k}) et $u \in C^{l-1}(\Omega)$ tels que $\partial^\alpha u_{j_k} \longrightarrow \partial^\alpha u$ uniformément sur les compacts, $\forall\, |\alpha| \leq l-1$

noter la perte d'une dérivée.

c) "Les bornes sur les compacts reviennent à des bornes locales" : établir $|u_j| \leq C_K$, $\forall K \subset\subset \Omega$, $\forall j$, équivaut à montrer que pour tout $x_0 \in \Omega$ il existe $R > 0$ tel que $|u_j| \leq C(x_0)$ sur $\overline{B}(x_0, R)$, $\forall j$.

$\boxed{\text{Preuve du 3.}}$ De ce qui précède, il suffit de montrer le résultat suivant :

$\forall x_0 \in \Omega$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\exists R > 0$, $\exists C = C(x_0, \alpha)$ tq $|\partial^\alpha u_j| \leq C$ sur $\overline{B}(x_0, R)$.

Soit $R > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, 2R) \subset \Omega$. Alors, avec $m = |\alpha|$:

$$|\partial^\alpha u_j(x)| \leq \frac{m^m n^m}{R^m} \sup_{\overline{B}(x, R)} |u_j| \underset{\text{Si } x \in \overline{B}(x_0, R)}{\leq} \frac{m^m n^m}{R^m} \sup_{\overline{B}(x_0, 2R)} |u_j|$$

$\leq C$. $\square$

$\boxed{\text{Exo 2}}$

Soient $x_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, 2R) \subset \Omega$.

Soit $C = \max_{\overline{B}(x_0, 2R)} |u|$, de sorte que, avec $m = |\alpha|$,

$$|\partial^\alpha u_j| \leq C \frac{m^m n^m}{R^m} \text{ sur } \overline{B}(x_0, R).$$ (cf Exo 1, 3.)

Rappelons la formule de Taylor avec reste intégral:

$$f(x_0+y) = \sum_{|\alpha|<m} \partial^\alpha f(x_0)\frac{y^\alpha}{\alpha!} +$$

$$m\int_0^1 (1-t)^{m-1} \sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha f(x_0+ty)\frac{y^\alpha}{\alpha!}\,dt$$

(valide si $f \in C^m(\Omega)$ et $[x_0, x_0+y] \subset \Omega$).

~~Ceci~~ implique

$$\Big| f(x_0+y) - \sum_{|\alpha|<m} \partial^\alpha f(x_0)\frac{y^\alpha}{\alpha!}\Big| \leq \sum_{|\alpha|=m} \max_{[x_0,x_0+y]} |\partial^\alpha f| \frac{|y^\alpha|}{\alpha!}$$

$$\leq \underbrace{\max_{\substack{|\alpha|=m \\ x\in[x_0,x_0+y]}} |\partial^\alpha f(x)|}_{C_m} \; |y|^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}.$$

On montre facilement par récurrence sur m que

$\displaystyle\sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} = \frac{1}{m!}$. Ainsi:

$$(1)\quad \Big| f(x_0+y) - \sum_{|\alpha|<m} \partial^\alpha f(x_0)\frac{y^\alpha}{\alpha!}\Big| \leq \frac{|y|^m}{m!} C_m.$$

Si $|y| = \rho \leq R$, alors $[x_0, x_0+y] \subset \overline{B}(x_0, R)$, et donc

(1) et Exo 1, 2, implique

$$(2)\quad \Big| f(x_0+y) - \sum_{|\alpha|<m} \partial^\alpha f(x_0) \frac{y^\alpha}{\alpha!} \Big| \leq \frac{\rho^m}{m!} \, \frac{m^m n^m}{R^m} \, C.$$

Pour montrer que f est analytique (au voisinage de x_0), il suffit de trouver $\rho \leq R$ tel que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\rho^m}{m!} \, \frac{m^m n^m}{R^m} = 0 .$$

La formule de Stirling donne

$$m! \underset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi m} \, \frac{m^m}{e^m}, \quad \text{d'où}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\rho^m}{m!} \, \frac{m^m n^m}{R^m} = \lim_{m\to\infty} \sqrt{2\pi m} \, \left(\frac{e\rho}{R}\right)^m, \text{ et}$$

donc tout $\rho < \frac{R}{e}$ convient. $\square$

$\boxed{\text{Exo 3}}$

Soit $R > 0$ tel que $\overline{B}(x_0,R) \subset \Omega$ et (par exemple) $u(x_0) \geq u(x)$, $\forall x \in \overline{B}(x_0,R)$. La preuve du principe du maximum montre que $u \equiv u(x_0)$ dans $\overline{B}(x_0,R)$. Or, une fonction analytique dans un domaine qui est constante dans une boule est constante. $\square$

$\boxed{\text{Exo 4}}$

$\boxed{1}$ On a

$$\int_{B(x_0,R)} u = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B(x_0,R)} u = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_0^R \int_{S(x_0,R)} u = u(x_0). \quad \square$$

Comme dans la preuve de la formule de la moyenne

$\boxed{2}$ La preuve du principe du maximum repose uniquement sur la formule de la moyenne. Or, u et v (et donc $u-v$) vérifient cette formule.

$\boxed{3}$ Il suffit de montrer que u est harmonique sur $B(x_0,R)$ si $\overline{B}(x_0,R) \subset \Omega$. Soit $g = u|_{S(x_0,R)}$

Soit $v \in C(\overline{B}(x_0,R)) \cap C^2(B(x_0,R))$ la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } B(x_0,R) \\ v = g & \text{sur } S(x_0,R) \end{cases}.$$

De $\boxed{2}$, $u-v$ vérifie le principe du maximum dans $B(x_0,R)$. Or, $u-v=0$ sur $S(x_0,R)$, d'où $u = v$ = harmonique dans $B(x_0,R)$. $\square$

$\boxed{\text{Exo 5}}$

$\boxed{1}$ $\omega_n r^n u(x) = \int_{B(x,r)} u \leq \int_{B(y,R)} u = \omega_n R^n u(y)$,

d'où l'inégalité demandée. $\square$

$\boxed{2}$ On suppose, par exemple, u minorée : $u \geq C$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors $u - C \geqslant 0$, $u - C$ harmonique, et il suffit de montrer que $u - C$ est constante. Ainsi, on peut supposer directement que $u \geq 0$. De $\boxed{1}$ et du fait que $B(x, r) \subset B(y, r + |x-y|)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, on trouve

$$u(x) \leqslant \left(\frac{r + |x-y|}{r}\right)^n u(y).$$

En faisant $r \to \infty$ dans cette inégalité, on trouve $u(x) \leq u(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, d'où u constante. $\square$

$\boxed{3}$ <u>i)</u> Si $x \in K$, alors $\overline{B}(x, 4R) \subset \Omega$. Les boules $(B(x, R))_{x \in K}$ forment un recouvrement ouvert de K. On obtient la conclusion en considérant un sous-recouvrement fini de K.

<u>ii)</u> Il suffit de suivre l'indication. Ω étant connexe et ouvert, il est connexe par lignes polygonales. Soit $\gamma_{ij} \subset \Omega$ une ligne polygonale reliant x_i à x_j. Comme chaque $\overline{B}(x_i, R)$ est convexe, donc connexe par segments, $L = \bigcup_i \overline{B}(x_i, R) \cup \bigcup_{i,j} \gamma_{ij}$ convient : si $x \in \overline{B}(x_i, R)$ et $y \in \overline{B}(x_j, R)$, alors $[x, x_i] \cup \gamma_{ij} \cup [x_j, y]$ est une ligne polygonale

$\subset L$ de x à y. De même, pour $x, y \in L$ arbitraires on peut trouver une ligne polygonale $\subset L$ et reliant x à y. $\square$

<u>iii)</u> Soit $\tau = \sup\{t \in [0,1] ; \gamma(t) \in \omega_{i_0}\}$, où $\gamma(0) \in \omega_{i_0}$. γ étant continue, on a $\tau > 0$. Si $\tau = 1$, on prend $t_1 = 1$, $i_1 = i_0$. Sinon: $\gamma(\tau) \notin \omega_{i_0}$. Soit $i_1 \neq i_0$ tel que $\gamma(\tau) \in \omega_{i_1}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma(t) \in \omega_{i_1}$, $\forall\ t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$. Il existe $t_1 \in [\tau-\varepsilon, \tau]$ tel que $\gamma(t_1) \in \omega_{i_0}$ (par définition du sup). On a donc $\gamma(t_1) \in \omega_{i_0} \cap \omega_{i_1}$. On recommence en considérant $\sigma = \sup\{t \in [t_1, 1] ; \gamma(t) \in \omega_{i_1}\}$. On note que $\sigma \geq \tau + \varepsilon > \tau$, et en particulier que $\gamma(\sigma) \notin \omega_{i_0}$. Ainsi, en refaisant le raisonnement ci-dessus, on a deux possibilités: ou bien $\sigma = 1$ et alors on prend $t_2 = 1$ et $i_2 = i_1$, ou bien $\sigma < 1$, et dans ce cas $\gamma(\sigma) \in \omega_{i_2}$, où $i_2 \neq i_1$ et $i_2 \neq i_0$. Et ainsi

important

de suite. Les indices étant différents d'une fois sur l'autre, la construction se fait en au plus $N+1$ itérations. $\square$

$\boxed{4.}$ On suit l'indication. On a

$$\max_K u \leq \max_L u \quad \text{et} \quad \min_K u \geq \min_L u ;$$

il suffit donc de remplacer K par L. Soit $0 < R < \frac{1}{4}\operatorname{dist}(L, \partial\Omega)$. On recouvre L avec N boules $B(x_i, R)$, $x_i \in L$. Soient $x, y \in L$. Soit $\gamma \subset L$ une ligne polygonale de x à y. Comme dans $\boxed{3}$ $\underline{iii}$), soient $x_0 = x$, $x_1, \ldots, x_p = y$, avec $p \leq N+1$ et $x_0 \in B(x_{i_0}, R)$, $x_1 \in B(x_{i_0}, R) \cap B(x_{i_1}, R)$, etc.

On a, de $\boxed{1}$ avec les rayons R et $4R$:

$$u(x_0) \leq 4^n u(x_1) \leq 4^{2n} u(x_1) \leq \ldots \leq 4^{pn} u(x_p),$$

d'où
$$u(x) \leq \underset{\underset{4^{pn}}{\shortparallel}}{C}\, u(y), \quad \forall x, y \in L.$$

On trouve $\max_L u \leq C \min_L u$. $\square$

$\boxed{\text{Exo 6}}$

$\boxed{1}$ Soit $v(x) = u(x) - \varepsilon\left(f\left(\frac{R}{2}\right) - E(x)\right)$, $0 < |x| \leq \frac{R}{2}$,

de sorte que $-\Delta v = 0$ et $v = 0$ sur $S(0, R/2)$. Le principe du maximum donne

$$v(x) \leq \max_{S(0,\frac{R}{2}) \cup S(0,\delta)} v, \quad \forall x \in B(0, \tfrac{R}{2}) \setminus \overline{B}(0,\delta).$$

Comme $\lim_{x\to 0} E(x) = -\infty$, on trouve que le maximum ci-dessus est <0 pour δ petit, d'où (en faisant $\delta \searrow 0$).

$$u(x) \leq \varepsilon\left(f\left(\tfrac{R}{2}\right) - E(x)\right) \text{ dans } B(0, R/2) \setminus \{0\}$$

En faisant $\varepsilon \to 0+$, on trouve $u \leq 0$ dans $B(0, R/2)\setminus\{0\}$

En remplaçant u par $-u$, on trouve $u=0$ dans $B(0,R/2)\setminus\{0\}$ et en particulier u se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 0, de sorte que $u\equiv 0$ dans $B(0,R/2)$

$\square$

$\boxed{2}$ On applique $\boxed{1}$ à $u-v$, où v est la solution de $\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{dans } B(0, R/2) \\ v = u & \text{sur } S(0, R/2) \end{cases}$. $\square$

$\boxed{\text{Exo 7}}$

$\boxed{1}$ Soit u la solution de (1). Soit $v(x', x_n) := -u(x', -x_n)$. Alors v vérifie aussi (1) (car f est impaire en x_n). Par unicité, $v=u$, d'où la conclusion.. $\square$

$\boxed{2}$ Clairement, v est harmonique dans $\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$

Il suffit de montrer que v est harmonique au voisinage de chaque point de $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$. Par exemple, on montre que v est harmonique au voisinage de 0. Soit $f = v\big|_{S(0,1)}$, qui est impaire en x_n et continue. Soit w la solution de

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{dans } B(0,1) \\ w = f & \text{sur } S(0,1) \end{cases}.$$

Alors w est impaire en x_n (de $\boxed{1}$) et donc $w\big|_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} = 0$. En particulier, la restriction de w à $\mathbb{R}^n_+$ vérifie

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{dans } B(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+ \\ w = f & \text{sur } S(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+ \\ w = 0 & \text{sur } B(0,1)\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}\right) \end{cases}.$$

Comme u vérifie le même problème, on déduit, par unicité, que $u = w$ dans $B(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+$, d'où, par construction de v et imparité de w, on a $v = w$ dans $B(0,1)$. $\square$