Université Lyon 1 Année 2011-2012
Master Mathématiques Générales $1^{\text{ère}}$ année
Introduction aux équations aux dérivées partielles

Devoir Maison 5. Espace de Schwartz
– à rendre le 30 avril 2012 –

Exercice 1. (*Distance associée à une suite de semi-normes*) Une semi-distance $d : X \times X \to [0, \infty)$ est une fonction symétrique vérifiant l'inégalité triangulaire.

1. Si d est une semi-distance, alors $\dfrac{d}{1+d}$ l'est aussi.
2. Soit $(d_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de semi-distances. Montrer que $d = \sum \dfrac{1}{2^j}\dfrac{d_j}{1+d_j}$ est une semi-distance.
3. Montrer que $d(x_k, x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ si et seulement si $d_j(x_k, x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$, $\forall\, j$.
4. Soit X un espace vectoriel. Soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de semi-normes sur X. On considère une bijection $\Phi : \mathbb{N} \to I$ et on définit $d(x,y) = \sum \dfrac{1}{2^j}\dfrac{p_{\Phi(j)}(x-y)}{1+p_{\Phi(j)}(x-y)}$.
   a) Montrer que d est une semi-distance sur X, et que $d(x_k, x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ si et seulement si $p_i(x_k - x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$.
   b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que d soit une distance.
   c) Montrer que la topologie induite par d ne dépend pas du choix de Φ.
   d) Montrer que $T : X \to \mathbb{R}$ est linéaire et continue pour la topologie induite par d si et seulement si il existe une famille finie $J \subset I$ et $C > 0$ tels que $|T(x)| \le C \displaystyle\sum_{i\in J} p_i(x)$. [Indication : on pourra raisonner par l'absurde, et supposer l'existence de $x_k \in X$ tel que $|T(x_k)| > (k+1) \displaystyle\sum_{j=0}^{k} p_{\Phi(j)}(x_k)$.]

Exercice 2. (*L'espace de Schwartz*) Soit $p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)|$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Soit

$$\mathscr{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,;\, p_{\alpha,\beta}(\varphi) < \infty,\, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}\},$$

muni d'une semi-distance induite d par la famille de semi-normes $p_{\alpha,\beta}$. ($\mathscr{S}$ est l'espace de Schwartz.)

1. Montrer que d est une distance.
2. Montrer que $(\mathscr{S}, d)$ est une espace métrique complet, et que cette propriété ne dépend pas du choix de d.
3. Montrer que les applications $\varphi \mapsto x^\gamma \varphi$ et $\varphi \mapsto \partial^\gamma \varphi$ sont continues de $\mathscr{S}$ vers $\mathscr{S}$, $\forall\, \gamma \in \mathbb{N}^n$.
4. Montrer que $(1 + |x|^k)|\varphi(x)| \le p_{0,0}(\varphi) + \sum_{|\beta|=k} p_{0,\beta}(\varphi)$.
5. Montrer l'inclusion continue $\mathscr{S} \hookrightarrow L^p$, $1 \le p \le \infty$.
6. On définit l'espace des fonctions à variation lente par

$\mathscr{L} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,;\, \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists\, M \in \mathbb{N},\, C > 0 \text{ t. q. } |\partial^\alpha f(x)| \le C(1+|x|)^M\}$.

Montrer que, si $f \in \mathscr{L}$, alors $\varphi \mapsto f\varphi$ est continue de $\mathscr{S}$ vers $\mathscr{S}$.

Exercice 3. (*Transformée de Fourier dans* $\mathscr{S}$) Comme $\mathscr{S} \subset L^1$, on peut définir la transformée de Fourier des fonctions de $\mathscr{S}$.

1. Si $\varphi \in \mathscr{S}$, calculer $\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.
2. Montrer que la transformée de Fourier définit un opérateur linéaire et continu de $\mathscr{S}$ vers $\mathscr{S}$.
3. En déduire la formule d'inversion :

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi, \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{S}.$$

Exercice 4. (*Théorème de Parseval*)

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.
2. Montrer les identités suivantes :

$$\int \widehat{\varphi}\psi = \int \varphi\widehat{\psi},$$

$$\int \varphi\overline{\psi} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}},$$

$$\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}\widehat{\psi},$$

$$\widehat{\varphi\psi} = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}.$$

[On utilisera le théorème de Fubini et/ou la formule d'inversion.]

3. En déduire le théorème de Plancherel : l'application $f \mapsto \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}\widehat{f}$, initialement définie sur $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, admet une unique extension linéaire et continue à $L^2(\mathbb{R}^n)$, et cette extension est unitaire.