Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2011-2012

Examen du 4 juin 2012. Durée : 3 heures

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. (*Equations elliptiques en forme divergence*)
Soit $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soit $A : \Omega \to M_n(\mathbb{R})$ une fonction mesurable.[1] On considère le problème :

$$\begin{cases} -\text{div } (A(x)\nabla u(x)) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}. \tag{1}$$

a) Ecrire la formulation variationnelle (faible) de cette équation. On mettra le problème sous la forme

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

b) A partir de maintenant, on suppose satisfaites les deux conditions suivantes :

$$\exists\, M > 0 \text{ tel que } |(A(x)\xi)\cdot\xi| \leq M|\xi|^2, \quad \forall\, x \in \Omega, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

$$\exists\, m > 0 \text{ tel que } (A(x)\xi)\cdot\xi \geq m|\xi|^2, \quad \forall\, x \in \Omega, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Montrer, en utilisant le lemme de Lax-Milgram, que pour chaque $f \in H^{-1}(\Omega)$ il existe un et un seul $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant (2).

c) On suppose de plus

$$A(x) \text{ symétrique}, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{5}$$

Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_j) \subset H_0^1(\Omega)$, qui soit une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, et une suite $\lambda_j \nearrow \infty$, telle que

$$-\text{div } (A(x)\nabla\varphi_j(x)) = \lambda_j\varphi_j, \quad \forall\, j.$$

d) Quels problèmes peuvent être résolus en utilisant les φ_j, les λ_j et la séparation des variables ?

Exercice 2. (*Principe du maximum faible*) Soit $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. On considère le problème

$$\begin{cases} u - \Delta u = f \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}. \tag{6}$$

1. C'est-à-dire pour chaque $x \in \Omega$ $A(x)$ est une matrice carrée $n \times n$, et l'application $x \mapsto a_{ij}(x)$ est mesurable, $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!]$.

a) On suppose $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ solution classique de (6). Montrer que $u \leq \max(0, \max f)$.

Dans la suite, on suppose $u \in H_0^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ solution faible de (6). On se propose de montrer que la conclusion du point précédent reste vraie p.p.

b) Soit $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(0) = 0$ et $|\Phi'| \leq C$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$, montrer que $\Phi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla(\Phi(u)) = \Phi'(u)\nabla u$.

c) En déduire que, si $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie (6) avec $f \in L^2(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega u\Phi(u) + \int_\Omega \Phi'(u)|\nabla u|^2 = \int_\Omega f\Phi(u). \tag{7}$$

d) En choisissant Φ avec le propriétés suivantes :

i) $\Phi(t) = 0$ si $t \leq M := \max(0, \sup f)$.

ii) $\Phi(t) > 0$ si $t > M$.

iii) Φ croissante et lipschitzienne

obtenir la conclusion $u \leq M$.

Exercice 3. (*Equation de la chaleur semi-linéaire*) On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = G(u) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) = 0 \end{cases}, \tag{8}$$

avec $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Rappels. Soit

$$X = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; f \text{ continue et bornée}\}$$

Muni de la norme $\| \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, X est un espace de Banach .[2]

On pose $P(x) = \dfrac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/4}$ et $P_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^n} P(x/\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$. On définit le semi-groupe de la chaleur par les formules

$$S(0)f(x) = f(x),\ S(t)f(x) = P_{\sqrt{t}} * f(x), \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Si $f \in X$, alors $S(t)f \in X$ et l'application

$$[0, +\infty) \ni t \mapsto S(t)f \in X$$

est continue.

2. X est communément noté $C_b(\mathbb{R}^n)$.

Moyennant des hypothèses sur $F(x,t)$, la solution mild du problème

$$(9)\qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = F & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) = 0 \end{cases},$$

est donnée par la formule de Duhamel

$$(10)\qquad u(x,t) = \int_0^t S(t-s)F(\cdot,s)(x)\,ds, \quad \forall\, t>0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Afin de faciliter la compréhension de ce qui suit, nous allons écrire autrement cette formule : on pose $v(t) = u(\cdot,t)$ et $H(t) = F(\cdot,t)$.[3] Alors la formule de Duhamel peut se récrire

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)H(s)\,ds.$$

Formulation du problème. La formule (10) suggère la définition suivante : u est solution faible de (8) si

$$(11)\qquad u(x,t) = \int_0^t S(t-s)G(u(\cdot,s))(x)\,ds, \quad \forall\, t>0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

La suite du problème est consacrée à la preuve du résultat suivant : si G est Lipschitzienne, alors (11) a une solution dans un espace convenable.

a) Soit K la constante de Lipschitz de G. Soit $M > K$. Soit

$$Y = \{v \in C([0,+\infty), X); v(0) = 0, \exists\, C \text{ t. q. } \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le Ce^{Mt}, \forall\, t \ge 0\},$$

muni de la norme

$$\|v\| = \inf\{C > 0; \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le Ce^{Mt}, \forall\, t \ge 0\} = \sup_{t \ge 0} e^{-Mt}\|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Montrer que Y est un espace de Banach.

b) (Question difficile)

i) Si $f \in X$, montrer que $S(t)f \in X$, $\forall\, t$.

ii) Si $v \in C([0,+\infty); X)$, montrer que $\int_0^t S(t-s)v(s)\,ds \in X$, $\forall\, t$, et que

$$[0,+\infty) \ni t \mapsto \int_0^t S(t-s)v(s)\,ds$$

est dans $C([0,+\infty); X)$.

3. Donc, à t fixé, v et H sont des fonctions de x.

c) Soit
$$Tv(t) = \int_0^t S(t-s)G(v(s))\,ds, \quad v \in Y.$$
Montrer que $T : Y \to Y$.

d) En utilisant le théorème du point fixe de Picard, montrer que (11) admet une solution dans Y.