Mathématiques Générales première année Année 2011-2012
Introduction aux équations aux dérivées partielles

Partiel du 19 mars 2012. Durée : deux heures

Exercice 1 $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^2$, et $\cdot$ le produit scalaire standard. Rappelons le théorème d'inversion de Fourier : si

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ est telle que } \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

alors

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x \cdot \xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

ce qui équivaut à : si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\mathcal{F}(\widehat{f})(\xi) = (2\pi)^n f(-x) \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

On admettra aussi que (2) est vraie sous les hypothèses

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n),\ \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\,; \tag{3}$$

ici, $\mathcal{F}\widehat{f}$ est définie au sens du théorème de Plancherel.

1. Soit
$$f(x) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} e^{-|x|^2/(4t)}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$
Calculer $\widehat{f}$. Peut-on tirer une conclusion à partir de (2) ? Laquelle ?
2. Montrer que l'hypothèse (3) est plus faible que l'hypothèse (1).

Exercice 2 On considère l'équation des ondes nD, $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u_{|t=0} = f & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ u_{t|t=0} = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}. \tag{4}$$

On suppose $f \in C_c^3(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$.

1. Soit $T > 0$. Montrer qu'il existe $R = R(T) > 0$ tel que $u(\cdot, t)$ soit à support dans $B(0, R)$ pour tout $t \in [0, T]$.
2. On définit les énergies cinétique $C(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x u(x,t)|^2\, dx$ et potentielle $P(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u_t(x,t)|^2\, dx$. Montrer que $C(t) + P(t)$ est constante. [Indication : utiliser l'égalité $u_t \Box u = 0$.]
3. On suppose $n = 1$. En calculant explicitement $C(t)$ et $P(t)$, montrer l'existence d'un $T > 0$ tel que $C(t) = P(t)$ pour $t \geq T$.

Exercice 3 On considère le problème

$$(5) \qquad \begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u_{|t=0} = f & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}.$$

Rappel : il est possible de trouver une solution continue de (5) lorsque f est continue et bornée. On examine ici si f lipschitzienne implique u lipschitzienne. La réponse est non (en général).

Soit $f(x) = |x|\varphi(x)$, où $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}; [0,1])$ et $\varphi = 1$ sur $[-1, 1]$.

1. Montrer que f est lipschitzienne. [Indication : en majorant $|f(x) - f(y)|$, distinguer les cas où $x \in \operatorname{supp} \varphi$ ou $y \in \operatorname{supp} \varphi$.]
2. Si u est la solution de (5) donnée par la formule de Poisson, calculer $\displaystyle\lim_{t \searrow 0} \frac{u(0,t) - u(0,0)}{t}$.
3. Conclure.
4. (*Question plus difficile*) Montrer qu'il n'existe pas de solution lipschitzienne de (5).