Université Lyon 1 Année 2012-2013
Master Mathématiques Générales 1ère année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

**Devoir Maison 3. Chaleur**

**A rendre le 15 avril**

**Rappel.** *Formule de la co-aire*
On se donne une fonction $\varphi \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$, avec $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ et $\nabla\varphi(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \Omega$. Alors :

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $[\varphi = t]$ est une $C^1$-sous-variété de dimension $n-1$ de $\Omega$.

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est borélienne, alors on a

$$(1) \qquad \int_{\mathbb{R}} \int_{[\varphi=t]} f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\, dt = \int_{\Omega} f(x)|\nabla\varphi(x)|\, dx,$$

avec la convention habituelle que si l'une des intégrales de (1) existe, alors l'autre existe aussi et les deux sont égales.

**Rappel.** *Solution fondamentale de l'équation de la chaleur*
La fonction

$$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

est une solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

**Rappel.** *Solution "obtenue par Fourier"*
Si $f$ est dans l'un des espaces $X$ suivants : $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, ou $X = UCB(\mathbb{R}^n)$ (l'espace des fonctions continues et uniformément bornées), alors

$$(2) \qquad u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} E(x-y,t) f(y)\, dy, & \text{si } t > 0 \\ f(x), & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

vérifie l'équation de la chaleur homogène $Lu = 0$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$, et on a $u(\cdot,t) \to f$ dans $X$ quand $t \to 0$.

**Lire.** *Partie facile du théorème de Denjoy-Carleman*
Avant de commencer, lire (et comprendre) la preuve simple du fait suivant. Soit $(a_j)$ une suite décroissante de nombre positifs telle que $\sum a_j < \infty$. Soit $\beta_j := 2^j/(a_0 \cdot \ldots \cdot a_j)$. Alors il existe une fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, non identiquement nulle, telle que $|f^{(j)}(t)| \leq \beta_j$, $\forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, j \in \mathbb{N}$.
Pour une preuve, voir Lars Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. 1, Springer-Verlag, 1990, deuxième édition, preuve du Théorème 1.3.5, p. 19 (c'est la partie facile du théorème).

**Exercice 1.** *Famille régularisante*
Soit $u \in C(\overline{B}(0,r) \times [0,\varepsilon_0])$. Pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, soient $r_\varepsilon \in (0,r)$ et $\rho^\varepsilon : \overline{B}(0,r_\varepsilon) \to \mathbb{R}_+$ tels que :

$r_\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

$\displaystyle\int_{B(0,r_\varepsilon)} \rho^\varepsilon \to 1$ quand $\varepsilon \to 0$.

Montrer que
$$\int_{B(0,r_\varepsilon)} u(x,\varepsilon)\rho^\varepsilon(x)\,dx \to u(0,0) \quad \text{quand } \varepsilon \to 0.$$

**Exercice 2.** *Inégalités de Cauchy dans* $\mathbb{C}^n$
Soient $P$ est un polynôme de $n$ variables, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $r > 0$. Montrer par récurrence sur $n$ les inégalités
$$|\partial^\alpha P(x)| \leq \frac{\alpha!}{r^{|\alpha|}} \sup_{\Gamma(x,r)} |P(z)|, \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$
où $\Gamma(x,r) = \{z \in \mathbb{C}^n\,;\, |z_j - x_j| = r, \forall\, j\}$.

**Exercice 3.** *Formule de Goursat*
La formule qui suit est l'analogue, pour l'équation de la chaleur, de la deuxième formule de Green.
Les hypothèses sont le suivantes.
$U \sqsubset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est lipschitzien.
$u = u(x,t), v = v(x,t)$ sont de classe $C^2$ dans $\overline{U}$.
Au moins l'un des $U$, $\operatorname{supp} u$ et $\operatorname{supp} v$ est relativement compact.
Si $(x,t) \in \partial U$, alors on décompose la normale extérieure en $(x,t)$ à $\partial U$ comme suit : $\nu = (\nu_x, \nu_t)$.
a) Montrer que $u(\partial_t v + \Delta_x v) + v(\partial_t u - \Delta_x u) = \operatorname{div}_{(x,t)} F$, où $F(x,t) = (u\nabla_x v - v\nabla_x u, uv)$.
b) En déduire l'*identité de Goursat*
$$\int_U [u(\partial_t v + \Delta_x v) + v(\partial_t u - \Delta_x u)] = \int_{\partial U} \left[ uv\nu_t + \left( u\frac{\partial v}{\partial \nu_x} - v\frac{\partial u}{\partial \nu_x} \right) \right]. \tag{3}$$
c) On suppose que $u \in C^2(U)$ vérifie $Lu = 0$ dans $U$. Soit $\omega \Subset U$ un ouvert lipschitzien. Montrer que
$$\int_{\partial\omega} u\nu_t = \int_{\partial\omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_x}. \tag{4}$$

**Exercice 4.** *Formule de la moyenne parabolique*
La formule de la moyenne parabolique est l'analogue, pour l'équation de la chaleur, de la formule de la moyenne pour l'équation de Laplace.
On définit la boule (fermée) parabolique de centre $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et de rayon $r > 0$ par
$$B(x,t\,;\,r) = \{(y,s)\,;\, s \leq t \text{ et } E(x-y,t-s) \geq 1/r^n\} = \{(y,s)\,;\, E(x-y,t-s) \geq 1/r^n\}.$$
La sphère parabolique de centre $(x,t)$ et de rayon $r$ est le bord de la boule parabolique correspondante :
$$S(x,t\,;\,r) = \{(y,s)\,;\, s \leq t \text{ et } E(x-y,t-s) = 1/r^n\}.$$
Nos hypothèses sont les suivantes.
$U \sqsubset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.
$B(x,t\,;\,R) \subset U$.
$u \in C^2(U)$ vérifie $Lu = 0$ dans $U$.
Le but est de montrer les formules suivantes :
$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\int_{S(x,t\,;\,r)} \frac{\partial_y E(x-y,t-s)}{\partial \nu_y} u(y,s)\,d\mathcal{H}^n(y,s) \\ &= \int_{S(x,t\,;\,r)} \frac{r^{-2/n}|y-x|^2}{4(t-s)^2|\nabla E(y,-s)|} u(y,s)\,d\mathcal{H}^n(y,s), \quad \forall\, 0 < r \leq R \\ &= \frac{\displaystyle\int_{S(x,t\,;\,r)} \frac{r^{-2/n}|y-x|^2}{4(t-s)^2|\nabla E(y,-s)|} u(y,s)\,d\mathcal{H}^n(y,s)}{\displaystyle\int_{S(x,t\,;\,r)} \frac{r^{-2/n}|y-x|^2}{4(t-s)^2|\nabla E(y,-s)|}\,d\mathcal{H}^n(y,s)} \end{aligned} \tag{5}$$

et

$$(6)\qquad u(x,t)=\frac{1}{4R^n}\int_{B(x,t\,;\,R)}\frac{|y-x|^2}{(t-s)^2}u(y,s)\,dyds=\frac{\displaystyle\int_{B(x,t\,;\,R)}\frac{|y-x|^2}{(t-s)^2}u(y,s)\,dyds}{\displaystyle\int_{B(x,t\,;\,R)}\frac{|y-x|^2}{(t-s)^2}\,dyds}.$$

a) Montrer que, si le résultat est vrai pour $x=0$, $t=0$, alors il est vrai pour tout $x$ et $t$.
   On supposera donc, dans la suite, que $x=0$ et $t=0$.

b) Soit $F(y,s)=E(-y,-s)=E(y,-s)$. Calculer $\partial_s F+\Delta_y F=0$ si $s<0$.

c) Soit, pour $c>0$, $U_c=S(0,0\,;\,c^{-1/n})$. Soit $\nu$ la normale extérieure à $B(0,0\,;\,c^{-1/n})$, que l'on écrit comme $\nu=(\nu_y,\nu_s)$. Posons $\xi:=\left((2ns+|y|^2)^2+4s^2|y|^2\right)^{1/2}$. Montrer les identités

$$(7)\qquad \nu_y=\frac{2sy}{\xi},\ |\nabla F|=\frac{\xi}{4s^2}F,\ -\frac{\partial_y F(y,s)}{\partial\nu_y}=\frac{c|y|^2}{\xi}=\frac{c^2|y|^2}{4s^2|\nabla F|},\quad\forall\,(y,s)\in U_c.$$

d) Montrer que la première égalité de (5) revient à

$$(8)\qquad u(0,0)=-\int_{U_c}\frac{\partial_y F(y,s)}{\partial\nu_y}u(y,s)d\mathcal{H}^n(y,s).$$

Pour obtenir (8), l'idée est d'utiliser (3) avec $=B(0,0\,;\,c^{-1/n})$ et $v=F$. Ceci est impossible directement, car $F$ n'est pas continue en $(0,0)$. Procédons par approximation : si $\varepsilon>0$ est suffisamment petit, posons

$\Omega_\varepsilon=\{(y,s)\in\mathring{B}(0,0\,;\,c^{-1/n})\,;\,s<-\varepsilon\}$

e) Montrer que $\Omega_\varepsilon$ est Lipschitz, de bord $U_c^\varepsilon\sqcup I_c^\varepsilon$, où
   $U_c^\varepsilon=U_c\cap[s\le-\varepsilon]$, $I_c^\varepsilon=B(0,r_c^\varepsilon)\times\{-\varepsilon\}$ ;
   ici, $r_c^\varepsilon=c^{-1/n}[-2nc^{2/n}\varepsilon\ln(4\pi c^{2/n}\varepsilon)]^{1/2}$.

f) Montrer que la formule de Goursat (3) appliquée dans $\Omega_\varepsilon$ donne

$$(9)\qquad \int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left[uF\nu_s+\left(u\frac{\partial F}{\partial\nu_y}-F\frac{\partial u}{\partial\nu_y}\right)\right]=0.$$

g) Calculer $\nu$ sur $I_c^\varepsilon$.

h) Dans cette étape, nous justifions le passage à la limite $\varepsilon\to0$. Montrer que

$$(10)\qquad \lim_{\varepsilon\to0}\int_{I_c^\varepsilon}uF\nu_s=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{I_c^\varepsilon}uF=u(0,0).$$

i) En utilisant la formule de Goursat, montrer que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}\int_{U_c^\varepsilon}\left[uF\nu_s-F\frac{\partial u}{\partial\nu_y}\right]=0$.

j) Montrer que $\dfrac{\partial F}{\partial\nu_y}$ est intégrable sur $U_c$.

k) En déduire (8).

l) Prouver la deuxième égalité de (5).
   Que donne cette égalité si $u\equiv1$ ?

m) Obtenir la dernière égalité de (5).

n) En utilisant la formule de la co-aire, justifier rigoureusement les calculs suivants.

$$(11)\qquad \begin{aligned} u(0,0)&=\frac{1}{4R^n}\int_{1/R^n}^\infty\frac{4u(0,0)}{c^2}\,dc=\frac{1}{4R^n}\int_{1/R^n}^\infty\int_{U(0,0\,;\,c)}\frac{|y|^2}{s^2|\nabla F|}u(y,s)\,d\mathcal{H}^n(y,s)\,dc\\ &=\frac{1}{4R^n}\int_{[F\ge1/r^n]}\frac{|y|^2}{s^2}u(y,s)\,dyds=\frac{1}{4R^n}\int_{B(x,t\,;\,R)}\frac{|y|^2}{s^2}u(y,s)\,dyds.\end{aligned}$$

o) Obtenir la deuxième égalité dans (6).

p) Prouver la variante des formules de moyenne : les formules (5) et (6) restent valables sous les hypothèses plus faibles suivantes.

$u \in C(B(x,t\,;\,R))$.

$u \in C^2$ et $Lu = 0$ à l'intérieur de $B(x,t\,;\,R)$.

Indication : commencer par appliquer, avec $0 < \delta < R$ fixé, la formule (5) pour exprimer $u(x-\varepsilon,t)$ en fonction des valeurs de $u$ sur $S(x-\varepsilon t\,;\,R-\delta)$.

**Exercice 5.** *Non unicité pour le problème de Cauchy*
Nous présentons un exemple, dû à Kolmogorov, de solution non identiquement nulle du problème homogène $\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ u(\cdot,0) = 0 \end{cases}$.
En utilisant la partie facile du théorème de Denjoy-Carleman, on considère une fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, non identiquement nulle, correspondant au choix $a_0 = 1$, $a_j = \dfrac{1}{j^a}$, $\forall\, j \geq 1$, où $a \in ]1,2[$.

Soient $\alpha_j := 2j(2j+n-2)$, $c_0 := 1$ et $c_j := \dfrac{1}{\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_j}$, $\forall\, j \geq 1$. On définit $u(x,t) := \sum_j \underbrace{c_j f^{(j)}(t)|x|^{2j}}_{u_j}$.

a) Montrer que $u \in C^\infty$ et $\partial^\alpha u = \sum \partial^\alpha u_j$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$.
Indication : on pourra utiliser les inégalités de Cauchy dans $\mathbb{C}^n$.

b) Montrer que $u$ est solution du problème homogène.

c) Montrer que $u$ est non identiquement nulle.