Mathématiques Générales première année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles
Année 2012-2013

Examen du 4 juin 2013. Durée : 3 heures
Equations elliptiques en forme divergence et opérateur des ondes associé

Soit $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soit $A : \Omega \to M_n(\mathbb{R})$ une fonction mesurable.[1] On considère le problème :

$$\begin{cases} -\text{div } (A(x)\nabla u(x)) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}. \tag{1}$$

a) Ecrire la formulation variationnelle (faible) de cette équation. On mettra le problème sous la forme

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

b) A partir de maintenant, on suppose satisfaites les deux conditions suivantes :

$$\exists\, M > 0 \text{ tel que } |(A(x)\xi) \cdot \xi| \leq M|\xi|^2, \quad \forall\, x \in \Omega, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

$$\exists\, m > 0 \text{ tel que } (A(x)\xi) \cdot \xi \geq m|\xi|^2, \quad \forall\, x \in \Omega, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Ici, $x \cdot y$ désigne le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$:

$$x \cdot y := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad \text{si } x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Montrer, en utilisant le lemme de Lax-Milgram, que pour chaque $f \in H^{-1}(\Omega)$ il existe un et un seul $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant (2).

c) On suppose de plus

$$A(x) \text{ symétrique}, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{5}$$

Montrer qu'il existe une suite $(e_j) \subset H_0^1(\Omega)$, qui soit une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, et une suite $\lambda_j \nearrow \infty$, telle que

$$-\text{div } (A(x)\nabla e_j(x)) = \lambda_j e_j, \quad \forall\, j.$$

d) Proposer des normes sur $H_0^1(\Omega)$ (respectivement sur $H^{-1}(\Omega)$) qui rendent simple le calcul de $\|f\|_{H_0^1(\Omega)}$ en fonction de $(f, e_j)_{L^2(\Omega)}$ (respectivement le calcul de $\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$ en fonction de $f(e_j)$).

1. C'est-à-dire : pour chaque $x \in \Omega$, $A(x)$ est une matrice carrée $n \times n$, et l'application $x \mapsto a_{ij}(x)$ est mesurable, $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!]$.

e) On suppose (3), (b) et (5). Proposer une théorie (formulation faible, cadre fonctionnel, existence, unicité) pour résoudre l'équation des ondes

$$\begin{cases} u_{tt} - \text{div }(A(x)\nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ u(\cdot,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\cdot,0) = f, & \text{sur } \Omega \\ u_t(\cdot,0) = g, & \text{sur } \Omega \end{cases} . \tag{6}$$

On distinguera entre un cadre donnant l'existence de la solution et un autre assurant l'unicité de la solution.

Justifier ces cadres en énonçant et prouvant un théorème d'existence et un théorème d'unicité. Détailler les calculs.