Mathématiques Générales première année Année 2012-2013
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

Partiel du 25 mars 2013. Durée : deux heures

Exercice 1 Soit D l'opérateur défini par

$$Du(x,y) := \partial_x u(x,y) + \imath \partial_y u(x,y), \quad \forall\, u \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}),$$

où $\imath^2 = -1$.

Soit

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C},\ E(x,y) := \frac{1}{2\pi(x+\imath y)}, \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

a) Calculer DE (dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$).

b) Montrer que $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

c) Montrer que E est solution fondamentale de D.

d) Si $u \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ vérifie $Du = 0$, montrer que u est holomorphe.

e) Soit $a \in C^\infty_c(\mathbb{R}^2)$. Montrer qu'il existe $A \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ telle que $DA = a$.

f) Avec A, a comme ci-dessus, soit $u \in C^1$ solution de

$$Du = au. \tag{1}$$

Trouver l'équation satisfaite par $v := e^{-A}u$.

g) En déduire toutes les solutions de (1).

Exercice 2 Soit $\lambda > 0$. Rappelons que, si $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ et

$$E_\lambda(x) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}\, dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

alors $E_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $w := E_\lambda * f$ est solution de $\lambda w - \Delta w = f$.

Autrement dit, E_λ est solution fondamentale de P_λ, où $P_\lambda w := \lambda w - \Delta w$, $\forall\, w \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

a) Montrer l'existence de la limite $E(x) := \lim_{\lambda \searrow 0} E_\lambda(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. [On pourra regarder la monotonie par rapport à λ.]

b) On suppose $n \geq 3$. Montrer que $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. [Indication : faire le changement de variables $s := |x|^2/(4t)$.]

c) On suppose $n \geq 3$. Montrer que E est solution fondamentale d'un opérateur que l'on explicitera.

Exercice 3 Soit $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soit $f \in C(\overline{\Omega})$. Soit $T \in (0, \infty]$. On considère le problème de Dirichlet

$$(2) \qquad \begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \Omega_T \\ u(\cdot, 0) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T) \end{cases} ;$$

ici, L est l'opérateur de la chaleur, et nous nous intéressons à des solutions $u \in C(\overline{\Omega}_T) \cap C^2(\Omega_T)$.

a) Quelle est la condition de compatibilité sur f ?

b) Soit $g := \begin{cases} |f|, & \text{dans } \Omega \\ 0, & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$, de sorte que $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$. [Bonus : pourquoi ?]

Soit v la solution donnée par la transformée du Fourier du problème $\begin{cases} Lv = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ v(\cdot, 0) = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$.

Montrer que $|u| \leq v$ dans Ω_T. [On pourra utiliser le principe du maximum.]

c) Montrer que

$$v(x, t) \leq \frac{C}{t^{n/2}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t > 0,$$

où C est une constante dépendant de f, de n et de Ω que l'on explicitera.

d) Interpréter le résultat de la question précédente comme un effet dispersif pour les solutions de (2).