Université Lyon 1 Année 2013–2014
Master Mathématiques Générales 1ère année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

Devoir no 3
Distributions
– à rendre le 31 mars 2014 –

Exercice 1. (*Sommes de Riemann et produits de convolution*) Soient $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Soit $F = \varphi * \psi$.
Pour $\varepsilon > 0$, nous posons

$$F_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(x - \varepsilon k)\psi(\varepsilon k).$$

1. Montrer F_ε est bien définie.
2. Montrer qu'il existe $K \Subset \mathbb{R}^n$ tel que $F_\varepsilon(x) = 0, \forall\, \varepsilon < 1, \forall\, x \notin K$.
3. Soit $Q = [0, 1[^n$. Montrer que

$$\varphi * \psi(x) = \varepsilon^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_Q \varphi(x - \varepsilon(k + y))\psi(\varepsilon(k + y))\, dy.$$

   [Commencer par $n = 1$ et $n = 2$ peut aider à comprendre cette égalité.]
4. En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que

$$|F_\varepsilon(x) - F(x)| \leq C\ \varepsilon \sum_{|\beta|\leq 1} \sup |\partial^\beta \varphi| \sum_{|\beta|\leq 1} \sup |\partial^\beta \psi|,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \varepsilon \in]0, 1[.$$

5. Majorer $|\partial^\alpha F_\varepsilon(x) - \partial^\alpha F(x)|$, avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
6. En déduire que $F_\varepsilon \to \varphi * \psi$ dans $C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Exercice 2. (*Associativité du produit de convolution*) Utiliser l'exercice précédent pour montrer que

$$(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi),\ \forall\, u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\ \forall\, \varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Exercice 3. (*De l'impossibilité de multiplier deux distributions*) Calculer $(x\, \delta)\,\text{v. p.}\ \dfrac{1}{x}$ et $\left(x\,\text{v. p.}\ \dfrac{1}{x}\right) \delta$. Conclusion ?

Exercice 4. (*Théorème de Malgrange-Ehrenpreis*) Comprendre et refaire (en ajoutant les détails manquants) la preuve de ce théorème qui se trouve dans l'article
Peter Wagner, *A New Constructive Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem*, American Mathematical Monthly, 116 :5 (2009), 457–462.

Exercice 5. (*Equation différentielle dans $\mathcal{D}'$*)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $u' + \alpha u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe une constante C telle que $u(t) = Ce^{-\alpha t}$.

Exercice 6. (*Propriétés de la mesure superficielle sur la sphère*)
Soit A une partie borélienne de $S(0,1)$. Soit $B = B(A) = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} tA$.

1. Montrer que B est une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathscr{H}^{n-1}(A) = n\lambda_n(B)$.
2. En déduire que $\sigma_n = n\omega_n$.
3. Soit $R \in \mathcal{O}(n)$. Déterminer $B(R(A))$. En déduire que la mesure sur la sphère $S(0,1)$ est invariante par isométries linéaires.
4. Soit $f : S(0,1) \to \mathbb{R}$ intégrable et impaire par rapport à l'une des coordonnées. Montrer que $\displaystyle\int_{S(0,1)} f(x)\, d\mathscr{H}^{n-1}(x) = 0$.
5. Calculer $\displaystyle\int_{S(0,1)} x_1^2\, d\mathscr{H}^{n-1}(x)$.

Exercice 7. (*Mesure d'un cône*)
Calculer la superficie du cône circulaire droit

$$\mathscr{C} := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, x_n + \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2} = 1, 0 \leq x_n \leq 1\}.$$

Exercice 8. (*Formules de la moyenne*)
Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que la fonction $G :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $r > 0$ par
$$G(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{S(0,r)} f(x)\, d\mathscr{H}^{n-1}(x)$$
est de classe C^1 et que $G'(r) = \displaystyle\frac{1}{r^n} \int_{S(0,r)} x \cdot \nabla f(x)\, d\mathscr{H}^{n-1}(x)$ pour tout $r > 0$.
2. En déduire que $G'(r) = \displaystyle\frac{1}{r^{n-1}} \int_{B(0,r)} \Delta f(x)\, dx$ pour tout $r > 0$.
3. Établir la *première formule de la moyenne* : si $f \in C^2(B(0,R)) \cap C(\overline{B}(0,R))$ est harmonique (càd solution de $\Delta f = 0$ dans Ω), alors
$$f(0) = \frac{1}{\mathscr{H}^{n-1}(S(0,R))} \int_{S(0,R)} f(x)\, d\mathscr{H}^{n-1}(x).$$
4. Établir la *deuxième formule de la moyenne* : si $f \in C^2(B(0,R)) \cap C(\overline{B}(0,R))$ est harmonique, alors
$$f(0) = \frac{1}{\lambda_n(B(0,R))} \int_{B(0,R)} f(x)\, d\lambda_n(x).$$

5. En déduire le *principe du maximum (minimum)* : si une fonction harmonique dans un ouvert connexe admet un point de maximum (minimum), alors elle est constante.
6. En déduire l'unicité de la solution du *problème de Dirichlet* : si Ω est un ouvert borné, alors le problème $\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$ a au plus une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.