Mathématiques Générales $1^{\text{ère}}$ année 2013–2014
Analyse appliquée aux EDP

Corrigé partiel du devoir 3

Exo 1

$\boxed{1}$ Soient $L := \operatorname{supp} \varphi$, $M := \operatorname{supp} \psi$.

On a $F_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \sum\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ \varepsilon k \in \operatorname{supp}\psi}} \varphi(x - \varepsilon k)\psi(\varepsilon k)$, et l'ensemble

$\{k \in \mathbb{Z}^n ; \varepsilon k \in \operatorname{supp}\psi\}$ est borné (contenu dans $\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{supp}\psi$, qui est borné), donc fini. La somme ne comportant qu'un nombre fini de termes $\neq 0$, elle est bien définie.

$\boxed{2}$ On a $\varphi(x-\varepsilon k)\psi(\varepsilon k) \neq 0 \Rightarrow x - \varepsilon k \in L$ et $\varepsilon k \in M \Rightarrow$ $x = x - \varepsilon k + \varepsilon k \in K := L + M \subset\subset \mathbb{R}^n$. Donc $F_\varepsilon(x) = 0$, $\forall x \notin K$.

$\boxed{3}$ On a (justifier!) $\mathbb{R}^n = \bigsqcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} \varepsilon(k + [0,1[^n)$. Comme $\varphi * \psi(x)$ est défini comme l'intégrale d'une fonction $\in C_c(\mathbb{R}^n)$ (donc $\in L^1$), on a,

$$\varphi * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{\varepsilon(k + [0,1[^n)} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy \underset{\substack{\text{c.v.} \\ y = \varepsilon(k+z), \\ z \in Q}}{=}$$

$$\varepsilon^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_Q \varphi(x - \varepsilon(k+z))\psi(\varepsilon(k+z))\,dz.$$

$\boxed{4}$ Pour k fixé, nous avons

$$I_k := \left| \int_Q \varphi(x - \varepsilon(k+y))\psi(\varepsilon(k+y))\,dy - \varphi(x - \varepsilon k)\psi(\varepsilon k) \right| =$$

$$\left| \int_Q [\varphi(x - \varepsilon(k+y))\psi(\varepsilon(k+y)) - \varphi(x-\varepsilon k)\psi(\varepsilon k)]\,dy \right| \leq$$

$$\max_{y \in Q} |\varphi(x - \varepsilon(k+y))\psi(\varepsilon(k+y)) - \varphi(x - \varepsilon k)\psi(\varepsilon k)| \leq$$

$$\max_{|z|\le \varepsilon\sqrt{n}} \max_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x-\varepsilon k-z)\psi(\varepsilon k+z)-\varphi(x-\varepsilon k)\psi(\varepsilon k)|.$$

Comme $|\varphi(x-\varepsilon k-z)\psi(\varepsilon k+z)-\varphi(x-\varepsilon k)\psi(\varepsilon k)| \le$

$$\le |\varphi(x-\varepsilon k-z)-\varphi(x-\varepsilon k)||\psi(\varepsilon k+z)| + |\varphi(x-\varepsilon k)||\psi(\varepsilon k+z)-\psi(\varepsilon k)|$$

$$\le |z|\,\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\|\psi\|_{L^\infty} + |z|\,\|\nabla\psi\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^\infty}$$

$$\le \varepsilon\sqrt{n}\sum_{|\beta|\le 1}\sup|\partial^\beta\varphi|\sum_{|\beta|\le 1}\sup|\partial^\beta\psi|,$$ on trouve

$$A \le \varepsilon\sqrt{n}\sum_{|\beta|\le 1}\sup|\partial^\beta\varphi|\sum_{|\beta|\le 1}\sup|\partial^\beta\psi| := C(\varphi,\psi)\varepsilon.$$

Il s'ensuit que

$$|F_\varepsilon(x)-F(x)| \le C(\varphi,\psi)\,\varepsilon^{n+1}\,\#I,$$ où

$$I := \left\{k\in\mathbb{Z}^n;\ \int_Q \varphi(x-\varepsilon(k+y))\psi(\varepsilon(k+y))\,dy - \varphi(x-\varepsilon k)\psi(\varepsilon k) \ne 0\right\}.$$

Si $k\in I$, alors il existe $y\in Q$ tq $\varphi(x-\varepsilon(k+y))\psi(\varepsilon(k+y))\ne 0$, ou alors $\varphi(x-\varepsilon k)\psi(\varepsilon k)\ne 0$. Dans les deux cas, $\exists$ $y\in Q$ tq $\varphi(x-\varepsilon(k+y))\psi(\varepsilon(k+y))\ne 0$, d'où $\varphi(x-\varepsilon(k+y))\ne 0$, d'où $(x-\varepsilon(k+Q))\cap L\ne\emptyset$. Donc

$$\#I \le \#\{k\in\mathbb{Z}^n;\ (x-L)\cap\varepsilon(k+Q)\ne\emptyset\}.$$

Si $N>0$ est tel que $L\subset[-N,N]^n$, alors $x-L\subset$ $= [x_1-N, x_1+N]\times\dots\times[x_n-N, x_n+N]$, d'où $x-L$ intersecte au plus $\left(E\left(\frac{2N}{\varepsilon}\right)+1\right)^n$ cubes de la forme $\varepsilon(k+Q)$ (faire un dessin). On trouve

$$\#I \le \left(E\left(\frac{2N}{\varepsilon}\right)+1\right)^n \le \left(\frac{2N+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n \le \left(\frac{2N+1}{\varepsilon}\right)^n, \ \forall\varepsilon\in]0,1[.$$

Finalement,

$$|F_\varepsilon(x) - F(x)| \leq C(\varphi, \psi)\,(2N+1)^n\,\varepsilon \quad , \forall x$$

$\boxed{5}$ De ce qui précède,

$$|\partial^\alpha F_\varepsilon(x) - \partial^\alpha F(x)| \leq C(\partial^\alpha \varphi, \psi)(2N+1)^n \varepsilon \,, \forall \varepsilon \in]0,1[, \forall \alpha, \forall x.$$

$\boxed{6}$ De $\boxed{1}$, supp $F_\varepsilon \subset K \subset\subset \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon$. De $\boxed{5}$, $\partial^\alpha F_\varepsilon \to \partial^\alpha F$ uniformément, $\forall \alpha$. D'où $F_\varepsilon \to F$ dans $C^\infty_K(\mathbb{R}^n)$.

$\boxed{\text{Exo2}}$ On a

$$u * (\varphi * \psi)(x) = u(\varphi * \psi(x - \cdot)) = u\Big(\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x - \cdot - \varepsilon k)\psi(\varepsilon k)\Big) = \lim_{\varepsilon \to 0} u\Big(\varepsilon^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x - \cdot - \varepsilon k)\psi(\varepsilon k)\Big)$$

la limite étant dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (justifier!) et utilisant la continuité de u

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} u(\varphi(x - \cdot - \varepsilon k))\psi(\varepsilon k).$$

la somme, pour ε fixé, est finie

Posons $v(x) := u * \varphi(x)$. Nous savons que $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nous trouvons :

$$(1) \quad u * (\varphi * \psi)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} v(x - \varepsilon k)\psi(\varepsilon k).$$

Si on examine la preuve de l'exercice 1 (pas le résultat final), on s'aperçoit que si au lieu de prendre dans cet exercice $\varphi \in C^\infty_c$ on prend $\varphi \in C^\infty$, alors pour tout x (et plus généralement uniformément sur les compacts) on a

$$(2)\ \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(x-\varepsilon k)\psi(\varepsilon k) = \varphi * \psi(x).$$

De (1) et (2) (avec $\varphi \rightsquigarrow \psi$) nous obtenons

$$u*(\varphi*\psi)(x) = v*\psi(x) = (u*\varphi)*\psi(x).$$

$\boxed{\text{Exo 3}}$ $x\delta = 0$ (avec la définition) et

$$x\, v.p.\tfrac{1}{x}(\varphi) = v.p.\tfrac{1}{x}(x\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x)\,dx = \text{(pourquoi?)}$$

$$\int \varphi(x)\,dx = T_1(\varphi).$$

Donc $\left(x\, v.p.\tfrac{1}{x}\right)\delta = 1\delta = \delta$, et $(x\delta)\, v.p.\tfrac{1}{x} = 0$.

Donc il n'existe pas de produit commutatif et associatif sur $\mathcal{D}'$ qui coïncide avec le produit usuel quand l'un des facteurs est C^∞.

$\boxed{\text{Exo 5}}$ Commençons par établir un résultat bien plus général que nécessaire pour les besoins de l'exo.

<u>Lemme 1.</u> Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe. Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $\partial_j u = 0$, $j \in [\![1,n]\!]$, alors u est constante. (Et réciproquement !)

<u>Lemme 2.</u> Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Alors il existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ tel que $\operatorname{div}\psi = \varphi \iff \int_\Omega \varphi = 0$.

<u>Preuve du lemme 1 (utilisant le lemme 2).</u> On fixe $\varphi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ tq $\int \varphi_0 = 1$. Soit $\rho \in C_c^\infty(\Omega)$, et soit $\varphi := \rho - \left(\int_\Omega \rho\right)\varphi_0$. Alors $\int \varphi = 0$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, et donc on peut écrire $\varphi = \operatorname{div}\psi$, avec $\psi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$. On obtient

$$\underline{u(\rho)} = u\left(\varphi + \left(\int_\Omega \rho\right)\varphi_0\right) = u\left(\sum_j \partial_j \psi_j\right) + \underbrace{u(\varphi_0)}_{C}\int_\Omega \rho$$

$$= -\sum_j \partial_j u(\psi_j) + C(\rho) = \underline{C(\rho)},\ \forall \rho \in C_c^\infty(\Omega). \qquad \square$$

Preuve du lemme 2. (Remarque : dans l'exercice, nous utilisons uniquement le cas $n=1$, qui est simple.)

Notons que si $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$ et $\int_0^1 \varphi(t)\,dt = 0$, alors $x \longmapsto \int_0^x \varphi(t)\,dt = \psi(x) \in C_c^\infty(]0,1[)$ (pourquoi ?)

Commençons par établir la généralisation de ce fait à $\mathbb{R}^n$.

Lemme 3. Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[^n)$ tq $\int \varphi = 0$. Alors il existe $\psi \in C_c^\infty(]0,1[^n;\mathbb{R}^n)$ tq $\operatorname{div} \psi = \varphi$. $]0,1[^n$

(C'est donc le lemme 2 pour $\Omega =$ cube).

Preuve du lemme 3. Soit (P_j), $j \in [\![1,n]\!]$, la propriété suivante :

$$\int_{]0,1[^j} \varphi(x_1,\ldots,x_j,x_{j+1},\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_j = 0, \quad \forall (x_{j+1},\ldots,x_n) \in]0,1[^{n-j}.$$

Nous devons montrer que si φ satisfait (P_n), alors $\varphi = \operatorname{div} \psi$, $\psi \in C_c^\infty$

Nous allons montrer, par récurrence sur j, que $\varphi = \operatorname{div}\psi$ si φ satisfait P_j

Le cas $j=1$. Prenons $\psi_1(x) = \int_0^{x_1} \varphi(t,x_2,\ldots,x_n)\,dt$. Alors $\psi_1 \in C_c^\infty(]0,1[^n)$ (pourquoi ?) et $\partial_1 \psi_1 = \varphi$, d'où $\operatorname{div}(\psi_1,0,\ldots,0) = \varphi$.

Passage $j \to j+1$. Soit φ satisfaisant (P_{j+1}), càd.

$$\int_{]0,1[^{j+1}} \varphi(x_1,\ldots,x_{j+1},x_{j+2},\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_{j+1} = 0, \quad \forall (x_{j+2},\ldots,x_n) \in]0,1[^{n-j-1}.$$

Posons $\eta(x_{j+1},\dots,x_n) := \displaystyle\int_{]0,1[^j} \varphi(x_1,\dots,x_j,x_{j+1},\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_j$, $\forall (x_{j+1},\dots,x_n)\in\,]0,1[^{n-j}$,

de sorte que $\eta\in C_c^\infty(]0,1[^{n-j})$ et (en utilisant (P_{j+1}))

$$\int_0^1 \eta(x_{j+1},\dots,x_n)\,dx_{j+1}=0 \quad \forall (x_{j+2},\dots,x_n)\in\,]0,1[^{n-j-1}.$$

Soit $\zeta \in C_c^\infty(]0,1[^j)$ tq $\int\zeta = 1$, et posons

$$\tilde\varphi(x) = \varphi(x) - \zeta(x_1,\dots,x_j)\,\eta(x_{j+1},\dots,x_n).$$

Alors $\tilde\varphi$ satisfait (P_j) (vérifier!) et donc, par hypothèse de récurrence, $\tilde\varphi = \operatorname{div}\tilde\Psi$ pour $\tilde\Psi\in C_c^\infty$. Il reste à écrire comme une divergence la fonction

$$F(x) := \zeta(x_1,\dots,x_j)\,\eta(x_{j+1},\dots,x_n)$$

Or, si on pose $\lambda(x_{j+1},\dots,x_n) := \displaystyle\int_0^{x_{j+1}} \eta(t,x_{j+2},\dots,x_n)\,dt$, alors $\lambda\in C_c^\infty(]0,1[^{n-j})$ (pourquoi?) et $\partial_{j+1}\lambda=\eta$, d'où $F=\operatorname{div} G$, avec

$$G(x) = (0,\dots,0,\underbrace{\zeta(x_1,\dots,x_j)\lambda(x_{j+1},\dots,x_n)}_{(j+1)^e\ \text{position}},0,\dots,0) \quad \square$$

<u>Remarque</u>: Le lemme 3 est vrai dans tout cube ou pavé!

<u>Retour à la preuve du lemme 2</u>

Soit Ω connexe. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tq $\int\varphi = 0$. Pour chaque $x\in\Omega$, il existe un cube ouvert C_x tq $x\in C_x \subset \Omega$. Le support de φ étant compact, on peut le couvrir avec un nombre fini de cubes, disons $Q_1,\dots,Q_\ell$. Soit $(\varphi_j)_{1\le j\le \ell}$ une partition de l'unité subordonnée (donc $\varphi_j\in C_c^\infty(Q_j)$ et $\sum\varphi_j = 1$ dans $K := \operatorname{supp}\varphi$). Pour chaque j, soit $\rho_j\in C_c^\infty(Q_j)$ tq $\int\rho_j = 1$

Posons $\varphi^j := \varphi \varphi_j - \left(\int \varphi \varphi_j\right) \zeta_j$, de sorte que $\varphi^j \in C_c^\infty(Q_j)$ et $\int \varphi^j = 0$ (pourquoi?) Du lemme 3, il existe $\psi^j \in C_c^\infty(Q_j, \mathbb{R}^n)$ tq $\operatorname{div} \psi^j = \varphi^j$. Si $t_j := \int \varphi \varphi_j$, alors $\sum t_j = \int \varphi \sum \varphi_j$

$$= \int_{\operatorname{supp} \varphi} \varphi \underbrace{\sum \varphi_j}_{=1 \text{ sur } \operatorname{supp} \varphi_j} = \int \varphi = 0.$$

Donc:

(1) $\varphi = \sum \varphi \varphi_j = \sum \varphi^j + t_j \zeta_j$, avec $\varphi^j = \operatorname{div} \psi^j$ et $\sum t_j = 0$.

Lemme 4. Si $\zeta, \tilde{\zeta}$ sont tq $\operatorname{supp} \zeta \subset C_x$, $\operatorname{supp} \tilde{\zeta} \subset C_y$ et $\int \zeta = \int \tilde{\zeta} = 1$, alors il existe $\tilde{\Psi}$ tq $\operatorname{div} \tilde{\Psi} = \zeta - \tilde{\zeta}$ et $\tilde{\Psi} \in C_c^\infty(\Omega)$

Fin lemme 2 en utilisant le lemme 4. Fixons un $x \in \Omega$ et un $\tilde{\zeta} \in C_c^\infty(C_x)$ tq $\int \tilde{\zeta} = 1$. Du lemme 4 et du fait que $\sum t_j = 0$,

on a

(2) $\sum t_j \zeta_j = \sum t_j (\zeta_j - \tilde{\zeta}) = \sum t_j \operatorname{div} \tilde{\Psi}^j$, $\tilde{\Psi}^j \in C_c^\infty(\Omega)$

De (1) et (2), $\varphi = \sum \operatorname{div} \psi^j + \sum t_j \operatorname{div} \tilde{\Psi}^j$. $\square$

Preuve lemme 4. Rappelons un fait de topologie : si (X, d) est connexe et si $(U_x)_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X, alors pour tout $x, y \in X$ il existe $\{x_1 = x, x_2, \dots, x_k = y\}$, $k \in \mathbb{N}$, tq

$U_{x_i} \cap U_{x_{i+1}} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, k-1$. (faire un dessin!)

[Indication: à y fixé, l'ensemble des points z avec cette propriété contient y, et est ouvert et fermé.]

Soient $\rho \in C_c^\infty(C_x)$ et $\tilde{\rho} \in C_c^\infty(C_y)$, avec $\int \rho = \int \tilde{\rho} = 0$.

Soient $x_1, \dots, x_k$ comme dans le fait de topologie. Pour $i \in [\![1, k-1]\!]$, on a $C_{x_i} \cap C_{x_{i+1}} =$ pavé, non vide, et donc il existe $\rho_i \in C_c^\infty(C_{x_i})$ avec $\int \rho_i = 1$. Du lemme 2, il existe $\psi^1 \in C_c^\infty(C_{x_1})$ tq $\operatorname{div} \psi^1 = \rho - \rho_1$, puis $\psi^2 \in C_c^\infty(C_{x_2})$ tq $\operatorname{div} \psi^2 = \rho_1 - \rho_2, \dots$, $\psi^k \in C_c^\infty(C_{x_k})$ tq $\operatorname{div} \psi^k = \rho_{k-1} - \tilde{\rho}$.

Finalement, $\psi := \psi^1 + \dots + \psi^k \in C_c^\infty(\Omega)$ et $\operatorname{div} \psi = \rho - \tilde{\rho}$. □

Retour à l'exo 5. Rappelons que

$$\left.\begin{array}{l} a \in C^\infty(\Omega) \\ u \in \mathcal{D}'(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow \partial_j(au) = (\partial_j a)\, u + a\, \partial_j u$$

Nous avons donc (avec $\Omega = \mathbb{R}$) $(e^{-at}u)' = e^{-at}u' - a e^{-at} u$,

d'où $u' + au = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pourquoi?}}}{\Longleftrightarrow} e^{-at}(u' + au) = 0 \Leftrightarrow (e^{-at}u)' = 0$

$\Leftrightarrow \exists\, C \in \mathbb{R}$ tq $e^{-at}u = C \underset{\text{pourquoi?}}{\Longleftrightarrow} u = Ce^{at}$. D.

$\boxed{\text{Exo 6}}$

$\boxed{1}$ Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = \frac{x}{|x|}$. Alors Φ est continue, donc borélienne. On a

$$B = \left(\Phi^{-1}(A) \cap \overline{B}(0,1)\right) \cup \{0\},$$ d'où A borélien $\Rightarrow B$ borélien.

Remarque : une union non dénombrable de boréliens n'est pas forcément un borélien. Donc l'argument

"tA borélien $\forall t \Rightarrow \bigcup_{0 \le t \le 1} tA$ borélien" n'est pas correct.

Appliquons la formule de la coaire :

$$\lambda_n(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B(x)\,dx = \int_0^{\infty} \Big(\int_{S(0,r)} \mathbb{1}_B(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\Big)\, dr$$

$$= \int_0^1 \Big(\int_{S(0,r)} \mathbb{1}_{rA}(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\Big)\, dr = \int_0^1 r^{n-1}\Big(\int_{S(0,1)} \mathbb{1}_{rA}(ry)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)\Big) dr$$

Or, $\mathbb{1}_{rA}(ry) = \mathbb{1}_A(y)$, d'où $\displaystyle\int_{S(0,1)} \mathbb{1}_{rA}(ry)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \mathcal{H}^{n-1}(A)$.

Finalement,

$$\lambda_n(B) = \mathcal{H}^{n-1}(A) \int_0^1 r^{n-1}\,dr = \frac{\mathcal{H}^{n-1}(A)}{n},$$ d'où $\mathcal{H}^{n-1}(A) = n\lambda_n(B)$ $\square$

$\boxed{2}$ Si $A = S(0,1)$, alors $B = \overline{B}(0,1)$, d'où

$$\sigma_n = \mathcal{H}^{n-1}(S(0,1)) = n\,\lambda_n(\overline{B}(0,1)) = n\lambda_n(B(0,1)) = n\omega_n.\ \square$$

$\boxed{3}$. Clairement (?) $B(R(A)) = R(B(A))$. La mesure de Lebesgue étant invariante par isométries, on a

$$\mathcal{H}^{n-1}(R(A)) = n\lambda_n(B(R(A))) = n\lambda_n(R(B(A))) = n\lambda_n(B(A)) =$$
$$= \mathcal{H}^{n-1}(A),$$ d'où $\mathcal{H}^{n-1}$ est invariante par isométries linéaires $\square$

$\boxed{4}$ Soit $R(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Si f est impaire en x_i, alors $f\circ R = -f$. On obtient

$$(1) \quad \int_{S(0,1)} f\circ R\, d\mathcal{H}^{n-1} = -\int_{S(0,1)} f\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Or, la mesure $\mathcal{H}^{n-1}$ étant invariante par isométries, l'intégrale par rapport à cette mesure l'est aussi :

$$(2)\qquad \int_{S(0,1)} f\circ R \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{S(0,1)} f d\mathcal{H}^{n-1}, \quad \forall f \in L^1(S(0,1), \mathcal{H}^{n-1}).$$

[(2) se vérifie d'abord pour f étagée, puis pour $f \geq 0$ par convergence monotone, puis pour f quelconque par linéarité]. D'où, pour notre R spécifique, on a (2). De (1) et (2), on obtient $\displaystyle\int_{S(0,1)} f \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0$. □

$\boxed{5}$ Si $R_{1,j}$ est l'isométrie qui interchange x_1 et x_j, alors on a (2). (2) appliquée avec $f(x) = x_1^2$ donne

$$(3)\quad \int_{S(0,1)} x_j^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{S(0,1)} x_1^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}(x), \quad \forall j \in [\![1, n]\!]$$

En sommant (3) sur j on obtient

$$\int_{S(0,1)} d\mathcal{H}^{n-1}(x) = n \int_{S(0,1)} x_1^2 \, d\mathcal{H}^{n-1} dx, \text{ d'où}$$

□

$$\int_{S(0,1)} x_1^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \frac{1}{n} \mathcal{H}^{n-1}(S(0,1)) = \omega_n.$$

$\boxed{\text{Exo 7}}$ On a $\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{H}^{n-1}(\underbrace{\mathcal{C} \setminus \{(0,0,\dots,0,1)\}}_{\tilde{\mathcal{C}}})$,

et $\tilde{\mathcal{C}}$ est une (hyper) surface paramétrée à un ensemble $\mathcal{H}^{n-1}$-négligeable près. [Le fait que la partie non paramétrée est négligeable sera admis]

En effet, si $\Phi :]0,\pi[^{n-3} \times]0,2\pi[\to S(0,1) \setminus A$, avec A $\mathcal{H}^{n-2}$-négligeable, est la paramétrisation standard de la sphère de $\mathbb{R}^{n-1}$, alors

$$\Psi : \ ]0,1[\times]0,\pi[^{n-2} \times]0,2\pi[\ni (x_n, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$$
$$\longmapsto \left((1-x_n)\Phi(\theta_1,\dots,\theta_{n-2}), x_n \right) \in \tilde{\mathcal{C}} \setminus B$$ est une paramétrisation bijective. Ici, $B = \{ ((1-x_n)x', x_n) ; x' \in A \}$.

On obtient

$$\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{H}^{n-1}(\tilde{\mathcal{C}}) = \int_0^1 \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |J\Psi(x_n, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})| \dots$$

Or, la matrice jacobienne de Ψ est :

$$j(\Psi) = \begin{pmatrix} -\Phi & (1-x_n) j(\Phi) \\ 1 & 0 \ \cdots \ 0 \end{pmatrix}.$$ En écriture par blocs, on a

$$j(\Psi) = \begin{pmatrix} \alpha b & \beta A \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$ avec $\alpha = -1$, $b = \Phi$, $\beta = 1 - x_n$,

$A = j(\Phi)$.

La formule de Cauchy-Binet donne

$$|J\Psi| = \sqrt{\det {}^t j(\Psi)\, j(\Psi)} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \alpha^2\, {}^t b\, b + 1 & \alpha\beta\, {}^t b\, A \\ \alpha b\, {}^t A b & \beta^2\, {}^t A\, A \end{pmatrix}}.$$

L'observation clé est que ${}^t A\, b = 0$, et ce <u>quelle que soit la paramétrisation de la sphère</u>.

En effet, on a $\quad {}^tA\, b = \begin{pmatrix} \Phi\cdot\partial_1\Phi \\ \vdots \\ \Phi\cdot\partial_{n-2}\Phi \end{pmatrix}$. Or, comme

Φ est une paramétrisation de la sphère, on a $|\Phi|^2\equiv 1$,

d'où (en dérivant en θ_j) $2\,\Phi\cdot\partial_j\Phi = 0$, $\forall j$.

Donc (compte tenant du fait que ${}^tb\,b = |\Phi|^2 = 1$)

$$|J\Psi| = \sqrt{\det\begin{pmatrix} \alpha^2+1 & 0 \\ 0 & \beta^2\,{}^tAA \end{pmatrix}} = \sqrt{\alpha^2+1}\;|\beta|^{n-2}\,\sqrt{\det({}^tAA)}$$

càd (en utilisant à nouveau Cauchy-Binet)

$$|J\Psi| = \sqrt{\alpha^2+1}\;|\beta|^{n-2}\,|J\Phi|.$$

Dans notre cas, $\sqrt{\alpha^2+1}\;|\beta| = \sqrt{2}\,(1-x_n)^{n-2}$, et donc $|J\Psi| = \sqrt{2}\,(1-x_n)^{n-2}\,|J\Phi|$

Finalement,

$$\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{C}) = \int_0^1 \sqrt{2}\,(1-x_n)^{n-2} \underbrace{\int_{]0,\pi[^{n-3}} \int_{]0,2\pi[} |J\Phi|\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-2})}_{\mathcal{H}^{n-2}(S(0,1))}\, dx_n$$

$$\frac{\sqrt{2}}{n-1}\,\mathcal{H}^{n-2}(S(0,1)) = \frac{\sqrt{2}}{n-1}\,\sigma_{n-1}.$$

Remarque : Le raisonnement ne marche plus si $n=1$. Dans ce cas, nous avons $\mathcal{H}^1(\mathcal{C}) = 2\sqrt{2}$. (vérifier !) $\square$

$\boxed{\text{Exo 8}}$

$\boxed{1}$ On a $\quad G(r) = \displaystyle\int_{S(0,1)} f(r\,x)\,d\mathcal{H}^{n-1}(x)$, d'où $G\in C^2$,

et G se prolonge en 0 (comme une fonction C^2) avec $G(0) = \sigma_n\, f(0)$.

Si $r>0$, alors $G'(r) = \displaystyle\int_{S(0,1)} x\cdot(\nabla f)(rx)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) =$

(1) $\displaystyle\frac{1}{r^{n-1}}\int_{S(0,r)} \frac{x}{r}\cdot\nabla f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \frac{1}{r^n}\int_{S(0,r)} x\cdot\nabla f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x).$

$\boxed{2}$ On a $G'(r) = (\text{de }(1))\ \displaystyle\frac{1}{r^{n-1}}\int_{S(0,r)} \nu\cdot\nabla f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$, avec $\nu=\nu(x)$, la normale extérieure à $B(0,r)$. Le théorème flux-divergence donne

$$G'(r) = \frac{1}{r^{n-1}}\int_{B(0,r)} \operatorname{div}\nabla f(x)\, dx = \frac{1}{r^{n-1}}\int_{B(0,r)} \Delta f(x)\, dx .$$

$\boxed{3}$ Sous ces hypothèses, $G\in C^2([0,R[)\cap C([0,R])$, et (du $\boxed{2}$) $G'(r)=0$, $\forall r\in\,]0,R[$. Il s'ensuit que $G(R)=G(0)=\sigma_n f(0)$, d'où

$\displaystyle\frac{1}{R^{n-1}}\int_{S(0,R)} f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \sigma_n f(0)$, ou encore $\displaystyle\frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}(S(0,R))}\int_{S(0,R)} f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$

$= f(0)$.

$\boxed{4}$ Nous avons $\displaystyle\int_{S(0,r)} f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = r^{n-1}\sigma_n f(0)$, $\forall r\in[0,R]$, d'où (2)

$$\int_{B(0,R)} f(x)\, dx = \int_0^R \int_{S(0,r)} f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\, dr = \frac{R^n}{n}\sigma_n f(0) = R^n \underbrace{\frac{\sigma_n}{n}}_{\omega_n} f(0)$$

$= \lambda_n(B(0,R))\, f(0)$. On conclut en divisant par $\lambda_n(B(0,R))$. $\square$

$\boxed{5}$ Soit x_0 un point de (par exemple) maximum de u, et soit $F=\{x\in\Omega;\ u(x)=u(x_0)\}$. Alors F est un fermé de Ω, qui est non vide (car $x_0\in F$). Pour conclure, il suffit de montrer que F est ouvert et d'invoquer la connexité de Ω.

Or, si $x_1 \in F$, soit $R>0$ tq $\overline{B}(x_1,R) \subset \Omega$. De la deuxième formule de la moyenne,

$$f(x_0) = f(x_1) = \frac{1}{\lambda_n(B(x_1,R))} \int_{B(x_1,r)} \underbrace{f(y)}_{\leq f(x_0)} \, dy \leq f(x_0).$$

Il s'ensuit que $f(y) = f(x_0)$ pp dans $B(x_1,r)$, d'où (f étant continue) $f(y) = f(x_0)$ $\forall y \in B(x_1,r)$, ou encore $B(x_1,r) \subset F$. $\square$

$\boxed{6}$ Il suffit de montrer que le problème homogène $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$ n'admet que la solution nulle. Soit x_0 un point de maximum de u sur $\overline{\omega}$, où ω est une composante connexe de Ω. Rappelons que $\partial\omega \subset \partial\Omega$. Si $x_0 \in \partial\omega$, alors $u \leq 0$. Sinon, $x_0 \in \omega$, et donc u est constante sur ω et donc sur $\overline{\omega}$. Comme $u=0$ sur $\partial\omega$, on obtient $u=0$ dans ω.

Dans tous les cas, $u \leq 0$ dans ω. De même, $u \geq 0$ dans ω.

On trouve $u=0$ dans chaque ω, et donc $u=0$ dans Ω. $\square$