Université Lyon 1 Année 2013–2014
Master Mathématiques Générales 1ère année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

Devoir no 1
Transformée de Fourier. Convolution
– à rendre le 27 février 2014 –

Exercice 1. (*Transformée de Fourier d'une gaussienne*) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, on note $G_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-Ax\cdot x}$. Montrer que

$$\mathscr{F}(G_A)(\xi) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-A^{-1}\xi\cdot\xi/4}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 2. (*Transformée de Fourier d'une gaussienne, suite*) Pour $z \in \mathbb{C}$, soit $g_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ g_z(x) = e^{-zx^2}$. On suppose $\operatorname{Re} z = 0$.

1. Montrer que $g_z \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
2. En utilisant le calcul de $\widehat{g_w}$, où $w = z + \varepsilon$, ε réel > 0, calculer la tranformée de Fourier de g_z.

Exercice 3. (*Inégalité de Young*) Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geq 1$. On définit $r \in [1, \infty]$ par l'égalité $\dfrac{1}{r} + 1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$.

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Montrer que :

1. $f * g$ est bien définie p. p.
2. $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

[Indication : partir de l'identité

$$|f(x-y)|\,|g(y)| = \left[|f(x-y)|^p |g(y)|^q\right]^{1/r} |f(x-y)|^{1-p/r} |g(y)|^{1-q/r}.$$

Appliquer à cette égalité l'inégalité de Hölder (dans la variable y) avec exposants conjugués r, r_1 et r_2, où r_1 et r_2 seront convenablement choisis.]

Exercice 4. (*Familles régularisantes*) Soit $(\rho^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une famille régularisante.

1. Si $f \in \mathrm{UCB}\,(\mathbb{R}^n)$, montrer que

   $$f * \rho^\varepsilon \to f \text{ uniformément quand } \varepsilon \to 0.$$

   $\mathrm{UCB}\,(\mathbb{R}^n)$ *est le sous espace de* $C_b(\mathbb{R}^n)$ *des fonctions uniformément continues et bornées.*

   [Indication : reprendre la preuve du cas où $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$.]
2. Même conclusion si $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.
   $C_0(\mathbb{R}^n)$ *est le sous espace de* $C_b(\mathbb{R}^n)$ *des fonctions continues qui s'annulent à l'infini, c'est-à-dire telles que* $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

   [Indication : comparer $C_0(\mathbb{R}^n)$ à $\mathrm{UCB}\,(\mathbb{R}^n)$.]

3. Soient $p \in [1, \infty[$ et $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
   (a) En imitant la preuve de l'inégalité $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}$, montrer que

$$\|f - f * \rho^\varepsilon\|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \rho^\varepsilon(y)\, dxdy.$$

   (b) Soit $R > 0$. Déduire de l'inégalité précédente que

$$\|f - f * \rho^\varepsilon\|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{|y|<R} |f(x-y) - f(x)|^p \rho^\varepsilon(y)\, dxdy + 2^p \|f\|_{L^p}^p \int_{|y|\geq R} \rho^\varepsilon(y)\, dy.$$

   (c) En déduire que $f * \rho^\varepsilon \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ quand $\varepsilon \to 0$.
4. Montrer que

$$f * \rho^\varepsilon \to f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ quand } \varepsilon \to 0,\ \forall\, p \in [1, \infty[,\ \forall\, f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

5. Soit $f = \mathbb{1}_{B(0,1)}$. Montrer que, quelle que soit la suite $\varepsilon_k \to 0$, on a $f * \rho^{\varepsilon_k} \not\to f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ quand $k \to \infty$. En particulier, $f * \rho^\varepsilon \not\to f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Exercice 5. (*Formule d'inversion dans* $L^1(\mathbb{R}^n)$) Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ **telle que** $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi \text{ p. p.}$$

[Indication : reprendre la preuve du théorème d'inversion dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et utiliser le point 4 de l'exercice précédent.]

Exercice 6. (*Plus sur les convolutions*) Soient $p \in [1, \infty[$ et q le conjugué de p. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Rappelons que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Exercice 3).
1. Montrer que $f * g \in C_b(\mathbb{R}^n)$.
   [Indication : commencer par le cas où $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.]
2. On suppose $1 < p < \infty$. Montrer que $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.
   [Indication : commencer par le cas où $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.]
3. Si $p = 1$, montrer que l'on n'a pas toujours $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 7. (*Somme de deux gros ensembles*) Soient $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles boréliens.
1. Pour commencer, on suppose que $0 < \lambda_n(X) < \infty$ et $0 < \lambda_n(Y) < \infty$.
   (a) Trouver une boule $B \subset \mathbb{R}^n$ telle que $\mathbb{1}_X * \mathbb{1}_Y(x) > 0, \forall\, x \in B$.
   [Indication : utiliser la continuité de $\mathbb{1}_X * \mathbb{1}_Y$.]
   (b) En déduire que $X + Y$ est d'intérieur non vide.
2. Même conclusion si $\lambda_n(X) > 0$ et $\lambda_n(Y) > 0$.

Exercice 8. (*Calculs explicites de transformées de Fourier dans* $\mathbb{R}$)
1. Calculer $\mathscr{F}\left(x \mapsto e^{-|x|}\right)$.

2. Calculer $\mathscr{F}\left(x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}\right)$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+\imath}$.
   (a) Montrer que $f \notin L^1(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $f \in L^2(\mathbb{R})$.
   (c) Pour quelles valeurs de $\xi \in \mathbb{R}$ a-t-on $\widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x\xi} f(x)\, dx$?
   (d) Si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, donner la formule de $\mathscr{F}(x \mapsto (x-\imath)\varphi(x))$.
   (e) A-t-on le droit d'appliquer cette formule si $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$?
   (f) En supposant que oui, deviner la valeur de $g := \mathscr{F}(f)$.
   (g) Maintenant calculer $\mathscr{F}(g)$.
   (h) En déduire (ouf !) la valeur de $\mathscr{F}(f)$.

Exercice 9. (*Principe d'incertitude de Heisenberg*)

1. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ à valeurs complexes. Montrer que
$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right) \geq 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x \operatorname{Re}\left(\bar{f}(x) f'(x)\right) dx\right)^2.$$
2. En déduire que
$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right) \geq \frac{\pi}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx\right)^2.$$
3. Déduire de ce qui précède une minoration de
$$\left(\int_{\mathbb{R}} (x-\bar{x})^2 |f(x)|^2\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} (\xi-\bar{\xi})^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right)$$
   pour $\bar{x}, \bar{\xi} \in \mathbb{R}$.
4. On suppose que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx = 1$. Montrer que la quantité ci-dessus est minimale lorsque
$$\bar{x} = \int_{\mathbb{R}} x |f(x)|^2\, dx \quad \text{et} \quad \bar{\xi} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$
5. Calculer
$$\inf \left(\int_{\mathbb{R}} (x-\bar{x})^2 |f(x)|^2\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} (\xi-\bar{\xi})^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right)$$
   lorque $\bar{x}$ et $\bar{\xi}$ sont choisis comme dans la question précédente et que f décrit l'ensemble des fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx = 1$.
   [Indication : on pourra étudier le cas où f est une gaussienne.]

Exercice 10. (*Ce qui a un sens est vrai*) L'exemple donné ici illustre la philosophie suivante : si une identité établie pour des fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (ou, dans des chapitres ultérieurs, pour des fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$) a un sens pour des fonctions dans un espace plus grand, alors cette identité reste vraie dans ce contexte plus général.

Partons par exemple de l'identité

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}, \quad \forall\, f,\, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

qui est vraie car elle est vraie plus généralement si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Notons que nous pouvons donner un sens à (1) si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. En effet, dans ce cas nous avons $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, et donc $f * g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, ce qui permet de définir le membre de gauche de (1) comme un élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Par ailleurs, comme $\widehat{f},\ \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, le membre de droite de (1) appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, et donc peut être identifié à un élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, (1) a un sens comme égalité de deux distributions tempérées.

Confirmer, sur cet exemple particulier, la philosophie générale en montrant la validité de (1) pour $f,\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
[Indication : on pourra commencer par le cas où $f,\, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.]