Mathématiques Générales 1ère année 2013 - 2014
Analyse appliquée aux EDP

Corrigé succinct du devoir 1

Exo 1

On utilise le résultat suivant (admis)

Lemme 1. On a $C_0(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^n)$.

$\boxed{a}$ (Utile à l'exo 2) Si $\exists C>0$ tq $\mathrm{Re}(Ax\cdot x) \geq C|x|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$, alors $x \longmapsto e^{-Ax\cdot x} \in \mathcal{S}$.

En particulier : si $A>0$, A symétrique, alors
$x \longmapsto e^{-Ax\cdot x} \in \mathcal{S}$

En effet, si $\beta \in \mathbb{N}^n$ alors (par récurrence sur $|\beta|$) $\exists P_\beta \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tq $\partial^\beta(e^{-Ax\cdot x}) = P_\beta(x) e^{-Ax\cdot x}$, d'où

$$\sup |x^\alpha \partial^\beta(e^{-Ax\cdot x})| = \sup |x^\alpha P_\beta(x) e^{-Ax\cdot x}| < \infty$$

Ici, on utilise le fait que

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^\alpha P_\beta(x) e^{-Ax\cdot x}| \leq \lim_{|x|\to\infty} |x^\alpha P_\beta(x)| e^{-C|x|^2} = 0,$$

d'où $x \longmapsto x^\alpha P_\beta(x) e^{-Ax\cdot x} \in C_0$, et le lemme 1.

$\boxed{b}$ Calcul de $\widehat{e^{-Ax\cdot x}}$:

On a, avec $A = PD\,{}^tP$, P orthogonale, $D>0$ diagonale :

$$\widehat{e^{-Ax\cdot x}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\,x\cdot\xi}\, e^{-Ax\cdot x}\,dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i x\cdot\xi}\, e^{-D\,{}^tPx\cdot{}^tPx}\,dx \underset{\substack{\text{c.v. } {}^tPx=y \\ dx=dy}}{=}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i y\cdot{}^tP\xi}\, e^{-Dy\cdot y}\,dy \underset{\text{on pose } {}^tP\xi=\eta}{=}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\eta} e^{-Dy\cdot y}\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_j e^{-i y_j \eta_j}\, e^{-d_{jj} y_j^2}\,dy$$

$$\underset{\text{(Fubini, justifier)}}{=} \prod_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i y_j \eta_j}\, e^{-d_{jj} y_j^2}\,dy_j$$

$$= \prod_j \sqrt{\frac{\pi}{d_{jj}}}\, e^{-\eta_j^2/4d_{jj}} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\prod_j d_{jj}}}\, e^{-\frac14 D^{-1}\eta\cdot\eta}$$

$$= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\, e^{-\frac14 (D^{-1}P^{-1}\xi)\cdot P^{-1}\xi} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\, e^{-\frac14 A^{-1}\xi\cdot\xi}.$$

Exo 2

$\boxed{1}$ On a $g_3 \in L^\infty$, d'où $L^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{T_{g_3}} \mathbb{C}$ est linéaire + continue. On trouve que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "T_{g_3}"'] & L^1 \arrow[r, "T_{g_3}"] & \mathbb{C} \end{tikzcd} \qquad T_{g_3} \in \mathcal{S}'$$

$\boxed{2}$ D'le lemme 1, on a $x \longmapsto e^{-(z+\varepsilon)x^2} \in \mathcal{S}$.

On sait que

$$\widehat{e^{-(z+\varepsilon)x^2}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{z+\varepsilon}}\; e^{-\frac{\xi^2}{4(z+\varepsilon)}}$$

, avec $\sqrt{}$ la racine carrée principale, qui est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$.

$\boxed{a}$ Calculons $\widehat{e^{-zx^2}}$ quand $z \neq 0$, $z \in i\mathbb{R}$.

Etape 1. On a $e^{-(z+\varepsilon)x^2}(\varphi) \to e^{-zx^2}(\varphi)$,

$\forall \varphi \in \mathcal{S}$.

Ceci se fait par convergence dominée, car $|e^{-(z+\varepsilon)x^2}\varphi(x)| \leq |\varphi(x)|$, et $\varphi \in L^1$.

Etape 2. Conclusion:

On a

$$\widehat{e^{-zx^2}}(\varphi) = e^{-zx^2}(\hat{\varphi}) = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{-(z+\varepsilon)x^2}(\hat{\varphi})$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{e^{-(z+\varepsilon)x^2}}(\varphi) \underset{(*)}{=} \sqrt{\frac{\pi}{z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi^2}{4z}}\, \varphi(\xi)\, d\xi\,,$$

$\forall \varphi \in \mathcal{S}$.

Justification de $(*)$: par convergence dominée, en utilisant la majoration $\left|\sqrt{\frac{\pi}{z+\varepsilon}}\; e^{-\frac{\xi^2}{4z+\varepsilon}}\, \varphi(\xi)\right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{|z|}}\, |\varphi(\xi)|$

Donc

$$\widehat{e^{-zx^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{z}}\; e^{-\frac{\xi^2}{4z}}.$$

$\boxed{b}$ Calculons $\widehat{e^{-zx^2}}$ si $z = 0$.

Vu : $\hat{1} = \delta_0 \cdot (2\pi)^n$.

$\boxed{\text{Exo 3}}$

$\boxed{a}$ <u>Etape préliminaire:</u> réduction au cas où $f, g \geq 0$.

Supposons que, sous l'hypothèse supplémentaire $f, g \geq 0$, $f * g$ est finie p.p. et $\| f*g \|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Comme $|f*g(x)| \leq |f| * |g|(x)$, on obtient du cas particulier que $f*g$ est (bien définie et) finie p.p., et que $\| f*g \|_{L^r} \leq \| |f| * |g| \|_{L^r} \leq \| |f| \|_{L^p} \| |g| \|_{L^q}$ $= \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Ainsi, on peut supposer $f \geq 0, g \geq 0$, ce qui donne automatiquement un sens à toutes les intégrales. Par ailleurs, on peut supposer f, g boréliennes (pourquoi?), ce qui rend toutes les fonctions boréliennes.

$\boxed{b}$ Posons $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{p}{r}\right)$, $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{q}{r}\right)$, de sorte que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$. Alors l'identité de l'indication et Hölder donnent (avec les modifications évidentes si l'un des exposés est ∞) :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right)^{1/r} \times$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}},$$

d'où (en effectuant le c.v. $x-y=z$ dans la 2e intégrale)

$$(1) \quad |(f*g)(x)|^r \leq \|f\|_{L^p}^{r-p} \|g\|_{L^q}^{r-q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En intégrant (1), en utilisant le thm de Tonelli et le c.v. (dans la variable x!) $x-y=z$, on obtient

$\|f*g\|_{L^r}^r \leq \|f\|_{L^p}^r \|g\|_{L^q}^r$; d'où l'inégalité de Young.

$\boxed{1}$ Comme $f*g \in L^r$, on obtient que $f*g$ est finie p.p.

$\boxed{\text{Exo4}}$ Il est instructif de connaître la caractérisation de la continuité uniforme avec des suites (admise).

<u>Lemme 2</u>. Soit $f : (X,d) \to (Y,\delta)$.

a) f est uniformément continue $\iff$

$\left[\forall (x_k), (y_k) \subset X, \ d(x_k, y_k) \to 0\right] \Longrightarrow \delta(f(x_k), f(y_k)) \to 0.$

b) f n'est pas uniformément continue $\iff$

$\exists\, \varepsilon > 0, \exists\, (x_k), (y_k) \subset X$ tq $d(x_k, y_k) \to 0$ et

$\delta(f(x_k), f(y_k)) \geq \varepsilon$.

$\boxed{1}$ Soit $\delta>0$. Soit $R>0$ tq $|x-y|<R \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\delta$.

On a

$$|f * \rho^\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y)-f(x)]\rho^\varepsilon(y)dy \right|$$

$$\leq \int_{|y|<R} \underbrace{|f(x-y)-f(x)|}_{<\delta} \rho^\varepsilon(y)dy + \int_{|y|\geq R} \underbrace{|f(x-y)-f(x)|}_{\leq 2\|f\|_{L^\infty}} \rho^\varepsilon(y)dy$$

$$< \delta \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \rho^\varepsilon(y)dy}_{=1} + 2\|f\|_{L^\infty} \underbrace{\int_{|y|\geq R} \rho^\varepsilon(y)dy}_{\to 0,\ \varepsilon \to 0} < 2\delta \text{ pour}$$

ε suffisamment petit.

$\boxed{2}$ Montrons que $C_0 \subset UCB$. Par le lemme 1, on a

$C_0 \subset C_b$.

Utilisons le lemme 2 pour montrer la continuité uniforme.

Par l'absurde ; $\exists\ \varepsilon>0, \exists\ (x_k), (y_k) \subset \mathbb{R}^n$ tq $x^k - y^k \to 0$

et $|f(x^k)-f(y^k)| \geq \varepsilon$. Utilisons l'exercice suivant (admis

Lemme 3. Soit $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$. Alors

(a) ou bien (x_k) contient une sous-suite convergente.

(b) ou bien $|x_k| \to \infty$.

Si $|x_k| \to \infty$, alors $|y_k| \to \infty$, et donc

$|f(x_k) - f(y_k)| \leq |f(x_k)| + |f(y_k)| \to 0$ Contradiction

Sinon, $\exists\ (x_{k_\ell})$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tq $x_{k_\ell} \to x$. Dans ce cas, $y_{k_\ell} \to x$, et donc

$$\left| f(x_{k_\ell}) - f(y_{k_\ell}) \right| \longrightarrow |f(x) - f(x)| = 0.$$ Contradiction.

Dans tous les cas de figure, nous avons une contradiction

$\boxed{3}$

$\boxed{(a)}$ On a

$$|f - f * \rho^\varepsilon(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)]\, \rho^\varepsilon(y)\, dy \right|$$

(2) $$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \left(\rho^\varepsilon(y)\right)^{1/p} \left(\rho^\varepsilon(y)\right)^{1/p'} dy$$

$$\underset{(\text{Hölder avec } p \text{ et } p')}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \rho^\varepsilon(y)\, dy \right)^{1/p} \underbrace{\left(\int \rho^\varepsilon(y)\, dy \right)^{1/p'}}_{=1}$$

On obtient l'inégalité demandée en intégrant par rapport à x l'inégalité (2) levée à l'exposant p.

$\boxed{(b)}$ Erreur d'énoncé! c'était 2^p au lieu de 2^{p-1}.

On a

(3) $$\| f - f * \rho_\varepsilon \|_{L^p}^p \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{|y|<R} | f(x-y) - f(x)|^p \rho^\varepsilon(y)\, dx dy}_{I} +$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{|y|\geq R} \text{---}}_{J}$$

Par convexité de $x \longmapsto |x|^p$, nous avons

$$|f(x-y)-f(x)|^p \leq 2^p\left(\frac{|f(x-y)|+|f(x)|}{2}\right)^p$$

$$\leq 2^{p-1}\left(|f(x-y)|^p+|f(x)|^p\right),$$

d'où

$$(4)\quad J \leq 2^{p-1}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{|y|\geq R}\left(|f(x-y)|^p+|f(x)|^p\right)\rho^\varepsilon(y)\,dx\,dy.$$

En intégrant (4) d'abord par rapport à x (thm de Tonelli) et en faisant le c.v. $x-y=z$ (en x !), on obtient

$$(5)\quad J \leq 2^p\, \|f\|_{L^p}^p \int_{|y|\geq R}\rho^\varepsilon(y)\,dy$$

On obtient la conclusion en combinant (3) et (5).

$\boxed{C}$ Soit $\delta>0$. Soit $R>0$ tq $|y|<\delta \Rightarrow |f(x-y)-f(x)|<\delta$.

Alors (de (6)) :

$$\|f-f*\rho_\varepsilon\|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{|y|<R}|f(x-y)-f(x)|^p\rho^\varepsilon(y)\,dx\,dy$$

$$+\underbrace{2^p\|f\|_{L^p}^p\int_{|y|\geq R}\rho^\varepsilon(y)\,dy}_{\to 0 \text{ qd } \varepsilon\to 0} \underset{(*)}{=} \int_{|x|\leq M+1}\int_{|y|<R}|f(x-y)-f(x)|^p\,dx\,dy$$

$$+\, 2^p\|f\|_{L^p}^p\int_{|y|\geq R}\rho^\varepsilon(y)\,dy \leq$$

$$\delta^p \int_{|x|\leq M+1} \int_{|y|<R} dx\,dy + 2^p \|f\|_{L^p}^p \int_{|y|\geq R} \rho^\varepsilon(y)\,dy$$

$\leq C\delta^p$ pour ε suffisamment petit. (d'où la conclusion).

<u>Justifions (*)</u>. Quitte à diminuer R, on peut supposer $R<1$. Soit M tq $f(x)=0$ si $|x|\geq M$.
Si $|x|\geq M+1$ et $|y|<R<1$, alors $|x-y|\geq |x|-|y|>M$,
et donc $f(x-y)-f(x)=0$. Ainsi $f(x-y)-f(x)=0$ si $|x|\geq M+1$, d'où l'intégrale se fait uniquement sur $|x|\leq M+1$.

$\boxed{4}$ Soit $(f_j)\subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tq $f_j\to f$ dans L^p.

Alors:

$$\|f*\rho^\varepsilon - f\|_{L^p} \leq \|(f-f_j)*\rho^\varepsilon\|_{L^p} + \|f_j - f_j*\rho^\varepsilon\|_{L^p} + \|f-f_j\|_{L^p} \tag{6}$$

$$\leq 2\|f-f_j\|_{L^p} + \|f_j - f_j*\rho^\varepsilon\|_{L^p}$$

en utilisant l'inégalité de Young

En fixant j et en faisant $\varepsilon\to 0$ dans (6), nous obtenons

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|f*\rho^\varepsilon - f\|_{L^p} \leq 2\|f-f_j\|_{L^p}, \ \forall j. \tag{7}$$

En faisant $j\to\infty$ dans (7), on aboutit à

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f * \rho^\varepsilon - f\|_{L^p} = 0.$$

$\boxed{5}$ Utilisons l'exo 6 1 : on a $\begin{cases} f \in L^\infty \\ \rho^\varepsilon \in L^1 \end{cases}$, et donc

$f * \rho^\varepsilon \in C$. Montrons plus que demandé :

(8) $\|f - \underbrace{f * \rho^\varepsilon}_{g}\|_{L^\infty} \geq \frac{1}{2}$, $\forall \varepsilon > 0$.

Preuve de (8) par l'absurde : si $\|f - g\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} - \varepsilon'$,

alors $|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2} - \varepsilon'$ p.p. En particulier, $|1 - g(x)| \leq \frac{1}{2} - \varepsilon'$

p.p. sur $B(0,1)$, d'où (*) $|1 - g(x)| \leq \frac{1}{2} - \varepsilon'$ partout dans $B(0,1)$.

(*) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Si f est continue dans Ω

et $f(x) \geq 0$ p.p dans Ω, alors $f \geq 0$ partout

dans Ω.

De même, $|g(x)| \leq \frac{1}{2} - \varepsilon'$ partout dans $\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$.

Soit maintenant $y \in S(0,1)$. Alors :

$$|g(y)| = \lim_{\delta \to 0} |g(\underbrace{(1+\delta)y}_{\in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)})| \leq \frac{1}{2} - \varepsilon'$$

De même :

$$|1 - g(y)| = \lim_{\delta \to 0} |1 - g(\underbrace{(1-\delta)y}_{\in B(0,1)})| \leq \frac{1}{2} - \varepsilon'.$$

Impossible.

Exo 5 L'exercice 6, feuille 1 montre que, si $f \in L^1$, $\hat{f} \in L^1$, alors

(9) $\displaystyle \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_{\varepsilon_k}(x-y) f(y)\, dy$,

où $\begin{cases} \varepsilon_k \to 0 \text{ est n'importe quelle suite.} \\ F_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{(2\pi\varepsilon)^{n/2}} e^{-|x|^2/2\varepsilon}. \end{cases}$

Posons $\rho = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/2}$, de sorte que $\rho > 0$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$.

Alors $F_\varepsilon = \rho_{\sqrt{\varepsilon}}$, et donc $(F_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est une famille régularisante (exo 5.1, feuille 1). De l'exo 4.4, on a $F_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ de L^1. Quitte à passer à une sous-suite, nous avons

(10) $\displaystyle \lim_{k \to \infty} F_{\varepsilon_k} * f(x) = f(x)$ p.p.

La conclusion s'obtient de (9) et (10).

Exo 6

$\boxed{a}$ Si $f, g \in C_c^\infty$, alors $f * g \in C^\infty$ et supp$(f*g)$ est compact (voir le cours sur les distributions), d'où $f * g \in C_0 \subset C_b$ (voir lemme 1).

$\boxed{b}$ Si $f \in C_c^\infty$ et $g \in L^q$, alors $f * g \in C^\infty$ et
$|f*g| \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$, d'où $f*g \in C_b$ (voir cours)

Young.

$\boxed{1}$ Soit $(f_i) \subset C_c^\infty$ tq $f_i \to f$ ds L^p. Alors:
$$|f*g - f_i*g| \le \|f-f_i\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \to 0,$$ et donc
$f*g$ est limite uniforme de fonctions de C_b, donc $f*g \in C_b$.

$\boxed{2}$ Soient $(f_i), (g_j) \subset C_c^\infty$ tq $f_i \to f$ ds L^p et $g_j \to g$
ds L^q. Alors:

$$|f*g - f_i*g_j| \le |(f-f_i)*g| + |f_j*(g_j-g)|$$
$$\le \underbrace{\|f-f_i\|_{L^p}}_{\to 0} \|g\|_{L^q} + \underbrace{\|f_i\|_{L^p}}_{\le C} \underbrace{\|g_j-g\|_{L^q}}_{\to 0} \to 0.$$

Ainsi, $f*g$ est limite uniforme de fonctions de C_0,
donc $f*g \in C_0$.

Au passage, nous avons utilisé le résultat suivant
(admis)

Lemme 4. Munis de la norme uniforme, C_b, UCB
et C_0 sont des espaces complets.

$\boxed{3}$ Prenons $f \in L^1$ d'intégrale 1 et $g = 1$. Alors $f * g \equiv 1$, donc $f * g \notin C_0$.

$\boxed{\text{Exo } 7}$

$\boxed{1}$

$\boxed{(a)}$ Le thm de Tonelli donne (avec le c.v. $x - y = z$ de la variable x)

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1\!\!1_X * 1\!\!1_Y(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} 1\!\!1_X(x-y)\,1\!\!1_Y(y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} 1\!\!1_X(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^n} 1\!\!1_Y(y)\,dy = \lambda_n(X)\lambda_n(Y) > 0.$$

D'où $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ tq $1\!\!1_X * 1\!\!1_Y(x_0) > 0$. Par ailleurs, $1\!\!1_X \in L^2$ et $1\!\!1_Y \in L^2$ d'où (exo 6.1) $1\!\!1_X * 1\!\!1_Y \in C_b$. Il existe donc $R > 0$ tq $1\!\!1_X * 1\!\!1_Y(x) > 0$, $\forall\, x \in \underbrace{B(x_0, R)}_{B}$

$\boxed{(b)}$ Soit $x \in B$. Alors $1\!\!1_X * 1\!\!1_Y(x) > 0 \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1\!\!1_X(x-y)\,1\!\!1_Y(y)\,dy > 0 \Rightarrow \exists\, y \in \mathbb{R}^n \text{ tq}$$

$$1\!\!1_X(x-y)\,1\!\!1_Y(y) > 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \begin{cases} y \in Y \\ x-y \in X \end{cases} \Rightarrow x \in X+Y.$$

Dc $B \subset X+Y$, d'où $X+Y$ d'intérieur non vide.

2. On a $\lambda_n(X) =$ (thm de la suite croissante)

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_n(\underbrace{\cancel{X} \cap B(0,j)}_{\text{partie de mesure finie de } X})$$

Ainsi, X contient une partie borélienne X' tq $0 < \lambda_n(X') < \infty$. De même, soit Y' tq $Y' \subset Y$ et $0 < \lambda_n(Y') < \infty$. De 1, $X'+Y'$ est d'intérieur non vide. Comme $X'+Y' \subset X+Y$, il en est de même pour $X+Y$.

Exo 8

1 $\quad \dfrac{2}{1+\xi^2}$

2 Comme $\widehat{e^{-|x|}} \in L^1$, la formule d'inversion s'applique et donne

$$(11) \quad \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \frac{1}{1+\xi^2}\, d\xi = e^{-|x|} \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}$$

Or, le membre de gauche de (11) est (à des constantes et signes près) une transformée de Fourier d'une fonction de L^1, donc une fonction continue. Ainsi, (11) donne l'égalité p.p. de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc l'égalité partout. On aboutit à

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{1}{1+\xi^2}\, d\xi = \pi e^{-|x|}, \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}.$$

$\boxed{3}$ $\boxed{(a)}$ On a $|f(x)| \sim \frac{1}{|x|}$ qd $|x| \to \infty$.

$\boxed{(b)}$ On a $|f(x)|^2 \sim \frac{1}{x^2}$ qd $|x| \to \infty$, et donc

$\int_{|x|\geq 1} |f(x)|^2 dx$ converge. Il n'y a pas de problème sur

$[-1,1]$.

$\boxed{(c)}$ Aucune, car $|e^{-ix\xi} f(x)| = |f(x)|$, et

$|f|$ n'est pas intégrable.

$\boxed{(d)}$ C'est du cours : $i\left(\widehat{\varphi'}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)\right)$.

$\boxed{(e)}$ Non, car $\varphi \notin \mathcal{S}$. En effet,

$$p_{3,0}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^3 \varphi(x)| = \infty.$$

$\boxed{(f)}$ On a $\hat{\varphi}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$ et donc (au sens des distributions, comme dans l'exo 8.2, feuille 3)

$$\hat{\varphi}'(\xi) = -\pi \operatorname{sgn}\xi \, e^{-|\xi|}.$$

On trouve <u>formellement</u>

$$\widehat{\frac{1}{x+i}}(\xi) = g(\xi) = -2i\pi e^{-\xi} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(\xi).$$

(g) $\hat{g}(x) = \dfrac{2\pi}{i - x}$

(h) On a $g \in L^1 \cap L^2$ (vérifier). En tant que fonction de L^2, la transformée de Fourier de g est bien donnée par le calcul de (g). La formule d'inversion de Fourier dans L^2 donne

$$\frac{1}{2\pi} \widehat{x \longmapsto \hat{g}(-x)} = g .$$

Comme $x \longmapsto \hat{g}(-x) = 2\pi f$, on obtient que $\hat{f} = g$.

Exo 9 Préambule à l'exercice : les applications $f \longmapsto f'$ et $f \longmapsto x^j f$ étant continues de $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, et compte tenu de l'injection continue $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p$, $\forall p$, toutes les intégrales considérées existent. De même, toutes les limites en $\pm\infty$ des quantités de la forme $x^j f(x)$ ou $x^j f'(x)$ sont nulles.

1 $$\left(\int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{Re}\,(\bar{f} f')(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |x|\,|f(x)|\,|f'(x)|\,dx\right)^2$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\,dx\right)^2 \underset{\text{Plancherel}}{=}$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f'}(\xi)|^2 d\xi\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$|\widehat{f'}(\xi)| = |\xi|\,|\hat{f}(\xi)|$$

$\boxed{2}$. Il suffit de mq

$$2\int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{Re}\left(\overline{f}(x) f'(x)\right) dx = -\int_{\mathbb{R}} |f|^2(x)\, dx.$$

Or,

$$2\int_{\mathbb{R}} x \;\mathrm{Re}\left(\overline{f}(x) f'(x)\right) dx = \int_{\mathbb{R}} x \left(|f|^2\right)'(x) dx =$$

$$\underbrace{\left[x |f|^2(x)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} |f|^2(x)\, dx$$

$\boxed{3}$ Par changements de variables évidents, la quantité à évaluer est

$$I = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x+\overline{x})|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\hat{f}(\xi + \overline{\xi})\right|^2 d\xi.$$

Posons $\quad g(x) = e^{-ix\cdot\overline{\xi}} f(x+\overline{x}). \in \mathcal{S}$ (pourquoi?)

Alors (vérifier!) $\quad |g(x)| = |f(x+\overline{x})|$ et

$|\hat{g}(\xi)| = |\hat{f}(\xi + \overline{\xi})|$.

De 2 et le c.v $\quad x + \overline{x} = y$, on obtient:

$$\int_{\mathbb{R}} (x-\bar{x})^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \left(\xi-\bar{\xi}\right)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = I$$

$$\geq \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} |f(x+\bar{x})|^2 dx = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy.$$

Erreur d'énoncé, formule de $\bar{\xi}$ incorrecte

$\boxed{4}$ La quantité de 3 est une fonction de la forme

$$(12)\quad \left(a_2\,\bar{x}^2 - 2a_1\bar{x} + a_0\right)\left(b_2\,\bar{\xi}^2 - 2b_1\bar{\xi} + b_0\right),$$

avec $\begin{cases} a_2 = \int |f|^2, & a_1 = \int x|f|^2, \quad a_0 = \int x^2|f|^2 \\ b_2 = \int |\hat{f}|^2, & b_1 = \int \xi |\hat{f}|^2, \quad b_0 = \int \xi^2 |\hat{f}|^2. \end{cases}$

Chacune des parenthèses de (12) étant positive, l'expression considérée est minimale lorsque chaque parenthèse l'est, càd si $\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{a_1}{a_2} \\ \bar{\xi} = \dfrac{b_1}{b_2} \end{cases}$;

càd si $\begin{cases} \bar{x} = \int x|f|^2 \Big/ \int |f|^2 = \int x|f|^2 \\ \bar{\xi} = \int \xi|\hat{f}|^2 \Big/ \int |\hat{f}|^2 = \int \xi |\hat{f}|^2 / 2\pi \end{cases}$

(Sous l'hypothèse $\int |f|^2 = 1$, qui entraîne $\int |\hat{f}|^2 = 2\pi$, par le thm de Plancherel).

$\boxed{5}$ De 3, on a $\inf \ldots \geq \pi/2$. Il suffit de trouver f telle que la quantité considérée soit $= \pi/2$ pour conclure à $\inf \ldots = \pi/2$.

On prend $f(x) = e^{-\pi x^2/2}$, qui vérifie

$$\begin{cases} f \in \mathcal{S} \\ \int |f|^2 = \int e^{-\pi x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} = 1. \end{cases}$$

Alors $\overline{x} = \overline{\xi} = 0$, car les intégrandes respectives sont impaires.

On trouve

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\pi x^2} \times$$

$$\times 2 \times \int_{\mathbb{R}} \xi^2 e^{-\xi^2/\pi} d\xi \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-y^2} dy \times 2 \times \pi\sqrt{\pi}$$

c.v. $x = \frac{y}{\sqrt{\pi}}$, $\xi = \sqrt{\pi}\eta$

$$\int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-y^2} dy = 2\left(\int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-y^2} dy\right)^2 \underset{(*)}{=} 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \pi/2$$

Preuve de $(*)$: $\int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-y^2} dy = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} y \left(e^{-y^2}\right)' dy$

$$= -\frac{1}{2}\left[y e^{-y^2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$\boxed{\text{Exo 10}}$ Soient $(f_j), (g_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tq $f_j \to f$ et $g_j \to g$ ds L^2. D'après la preuve de l'exo 6.2, nous avons

(13) $f_j * g_j \longrightarrow f * g$ ds L^∞,

càd $f_j * g_j \longrightarrow f * g$ uniformément.

De (13), nous avons $f_j * g_j \longrightarrow f * g$ dans $\mathcal{S}'$

(par convergence dominée : $\forall \varphi \in \mathcal{S}$,

(14) $\displaystyle (f_j * g_j)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f_j * g_j(x)\varphi(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x)\varphi(x)\,dx$,

en dominant avec $C|\varphi(x)|$).

On trouve : $\forall \varphi \in \mathcal{S}$,

(15) $\widehat{f * g}(\varphi) = f * g(\hat{\varphi}) = \lim_j f_j * g_j(\hat{\varphi}) = \lim_j \widehat{f_j * g_j}(\varphi)$

$\displaystyle = \lim_j \int \hat{f}_j(\xi)\,\hat{g}_j(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$

Or, $\|\hat{f}\hat{g} - \hat{f}_j\hat{g}_j\|_{L^1} \leq \|\hat{f} - \hat{f}_j\|_{L^2}\|\hat{g}_j\|_{L^2} + \|\hat{f}\|_{L^2}\|\hat{g} - \hat{g}_j\|_{L^2} \underset{\uparrow \text{ thm Plancherel}}{=} (2\pi)^n \big(\underbrace{\|f - f_j\|_{L^2}}_{\to 0}\underbrace{\|g_j\|_{L^2}}_{\leq C} + \|f\|_{L^2}\underbrace{\|g - g_j\|_{L^2}}_{\to 0}\big) \to 0$

D'où (16) $\hat{f}_j\hat{g}_j \longrightarrow \hat{f}\hat{g}$ dans L^1.

De (15), (16) et par convergence dominée (vérifier!)

$\widehat{f * g}(\varphi) = \hat{f}\hat{g}(\varphi)$, d'où $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

FIN