Devoir maison 2 - Corrigé

Exercice 1

1) Notons $h(x) = e^{-|x|}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors $h \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(i\xi+1)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(-i\xi+1)x} dx$$

$$= \left[\frac{e^{-(i\xi+1)x}}{-(i\xi+1)} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{(-i\xi+1)x}}{-i\xi+1} \right]_{-\infty}^0$$

$$= \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}$$

2) On a $h \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ donc par la formule d'inversion : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{h}(\xi) d\xi$$

i.e. $$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi}}{1+\xi^2} d\xi .$$

3) Comme $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+\xi^2} = \int_0^{+\infty} e^{-(1+\xi^2)t} dt$, on a

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} e^{ix\xi} e^{-(1+\xi^2)t} \, dt \right) d\xi \, .$

Fixons $x \in \mathbb{R}$.
Notons $F(\xi, t) = e^{ix\xi} e^{-(1+\xi^2)t} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} |F(\xi,t)| \, dt \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(1+\xi^2)t} \, dt \right) d\xi$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \pi < +\infty$$

donc par le théorème de Fubini-Tonelli, F est intégrable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Ainsi par le théorème de Fubini,

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-t\xi^2} \, d\xi \right) dt$$

et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-t\xi^2} \, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \, e^{-x^2/(4t)} \quad \forall t > 0$

donc $\displaystyle e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{-x^2/(4t)} \, dt \, .$

4) Soit $a>0$ et $F_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $F_a(x) = e^{-a|x|}$.

Par 3), on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$F_a(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{-a^2|x|^2/(4t)} dt$$

donc $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\quad (F_a \in L^1(\mathbb{R}^n))$

$$\hat{F_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} \left(\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} e^{-a^2|x|^2/(4t)} dt \right) dx$$

On fixe $\xi \in \mathbb{R}^n$ et on note $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $t>0$,

$$G(x,t) = e^{-ix.\xi} t^{-1/2} e^{-t} e^{-a^2|x|^2/(4t)}$$

On $\displaystyle \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} |G(x,t)| dx \right) dt = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|x|^2/(4t)} dx \right) d$

$$= \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} \left(\frac{2\sqrt{t}}{a} \right)^n (\sqrt{\pi})^n dt$$

$$= \frac{\pi^{n/2} 2^n}{a^n} \int_0^\infty t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} dt \quad < +\infty$$

donc par le théorème de Fubini-Tonelli, G est intégrable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. Ainsi, par le théorème de Fubini,

$$\hat{F}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_0\cdot\xi}\, e^{-a^2|\xi|^2/(4t)}\, dx \right) t^{-1/2} e^{-t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \pi^{n/2} \left(\frac{2\sqrt{t}}{a}\right)^n e^{-t|\xi|^2/a^2}\, t^{-1/2} e^{-t}\, dt$$

$$= \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{a^n} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} e^{-t\frac{|\xi|^2}{a^2}}\, dt$$

On fait le changement de variables

$$s = t\left(1 + \frac{|\xi|^2}{a^2}\right) \qquad dt = \frac{a^2}{a^2+|\xi|^2}\, ds$$

On obtient

$$\hat{F}_a(\xi) = \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{a^n} \int_0^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{(a^2+|\xi|^2)^{\frac{n-1}{2}}}\, s^{\frac{n-1}{2}} e^{-s}\, \frac{a^2}{a^2+|\xi|^2}\, ds$$

$$\hat{F}_a(\xi) = \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}}\, a}{(a^2+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{\infty} s^{\frac{n-1}{2}} e^{-s}\, ds$$

$$\boxed{\hat{F}_a(\xi) = \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}}\, a}{(a^2+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

5) Soit $t>0$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_x P(\cdot,t)(\xi) = e^{-|\xi|t}$
$= F_t(\xi)$.

On vient de mq $\mathcal{F} F_t(\xi) = \dfrac{C}{(t^2+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ donc

$\mathcal{F} F_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\left(\dfrac{1}{|\xi|^{n+1}} \text{ intégrable à l'infini dans } \mathbb{R}^n \right)$

La formule d'inversion donne

$$F_t(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \mathcal{F} F_t(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \mathcal{F} F_t(-x)\, dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}\left(\mathcal{F} F_t(-x) \right)(\xi)$$

Par injectivité de la transformée de Fourier, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$P(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F} F_t(-x)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

i.e. $\boxed{P(x,t) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \dfrac{t}{\left(t^2+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}}$.

Exercice 2

1) Formellement, si u solution de (P) alors $\hat{u}(t,\xi) = \mathcal{F}_x u(t,\cdot)(\xi)$ vérifie :

$$i \underset{\substack{\| \\ \partial_t \hat{u}}}{\widehat{\partial_t u}}(t,\xi) + \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(i\,\xi_j)^2}_{=-|\xi|^2} \hat{u}(t,\xi) = 0 \qquad \forall t, \xi$$

donc $\partial_t \hat{u}(t,\xi) = -i|\xi|^2 \hat{u}(t,\xi)$

et $\hat{u}(0,\xi) = \hat{g}(\xi)$

Ainsi $\hat{u}(t,\xi) = e^{-it|\xi|^2} \hat{g}(\xi) \quad \forall t, \xi$

et $u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\right) *_x g\,(x)$

On a vu que $e^{-it|\xi|^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ et que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\right)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{\pi^{n/2}}{\left(\sqrt{it}\right)^n} e^{i|x|^2/(4t)}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi i t}\right)^n} e^{i|x|^2/(4t)}$$

ainsi $u(t,x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi i t})^n} e^{i|x|^2/(4t)} \underset{x}{*} g$

$t \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$

---

2) a) Soit $t \neq 0$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$S(t)g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{4\pi i t})^n} e^{i|x-y|^2/(4t)} g(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{4\pi i t})^n} e^{i|x|^2/(4t)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{x}{2t}\cdot y} e^{i|y|^2/(4t)} g(y)\,dy$$

$$= e^{i|x|^2/(4t)} \widehat{g_t}\left(\frac{x}{2t}\right)$$

b) Soit $g \in L^1 \cap L^2$, $t \neq 0$. Alors $g^t \in L^1 \cap L^2$

donc par Parseval $\|\widehat{g^t}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|g^t\|_{L^2}$

et $\|g^t\|_{L^2} = \frac{1}{(\sqrt{4\pi |t|})^n} \|g\|_{L^2}$.

Ainsi $\left\|\widehat{g^t}\left(\frac{x}{2t}\right)\right\|_{L^2_x} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{g_t}\left(\frac{x}{2t}\right)\right|^2 dx\right)^{1/2}$

CVAR $y = \frac{x}{2t}$ $= \left((2t)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{g_t}(y)|^2 dy\right)^{1/2}$

$$\left\|\hat{g^t}\left(\frac{x}{2t}\right)\right\|_{L^2} = (2|t|)^{\frac{n}{2}} \|\hat{g^t}\|_{L^2} = (4\pi|t|)^{\frac{n}{2}} \|g^t\|_{L^2}$$

$$= \|g\|_{L^2}$$

On a donc $\underline{\|S(t)g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}}$.

c) $S(t) : L^1 \cap L^2 \longrightarrow L^2$

linéaire continue par b), L^2 complet et $L^1 \cap L^2$ dense dans L^2 donc par th de prolongement des applications uniformément continues, $S(t)$ s'étend en une isométrie de L^2 dans L^2.

d) Soit $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$, $t \neq 0$.

$$\widehat{\Phi_{\varepsilon,t} * g} = \widehat{\Phi_{\varepsilon,t}}\, \hat{g} \qquad \text{car } \Phi_{\varepsilon,t}, g \in L^1$$

et $\widehat{\Phi_{\varepsilon,t}}(\xi) = e^{-(it+\varepsilon)|\xi|^2} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$

Ainsi $\widehat{\Phi_{\varepsilon,t} * g}(\xi) = e^{-(it+\varepsilon)|\xi|^2}\, \hat{g}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\phi_{\varepsilon,t} * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_{\varepsilon,t}(x-y) g(y) dy.$$

On $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \phi_{\varepsilon,t}(x-y) = \phi_t(x-y)$

et $\forall \varepsilon > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$,

$$|\phi_{\varepsilon,t}(x-y) g(y)| \leq \frac{1}{(\sqrt{4\pi |t|})^n} |g(y)|, \quad g \in L^1$$

donc par théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \phi_{\varepsilon,t} * g(x) = \phi_t * g(x) = S(t) g(x).$$

e)

Supposons $g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors $\forall \varepsilon > 0, t \neq 0$,

$\widehat{\phi_{\varepsilon,t} * g}(\xi) = e^{-(it+\varepsilon)|\xi|^2} \hat{g}(\xi) \quad \forall \xi$

Par théorème de convergence dominée, on obtient facilement que $\|\widehat{\phi_{\varepsilon,t} * g}(\xi) - e^{-it|\xi|^2} \hat{g}(\xi)\|_{L^2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$
car $g \in L^2 \Rightarrow \hat{g} \in L^2$

Ainsi, par Plancherel

$$\phi_{\varepsilon,t} * g \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \mathcal{F}^{-1}(e^{-it|\xi|^2} \hat{g}(\xi)) \quad \underline{\text{dans } L^2}$$

Ainsi quitte à extraire $\phi_{\varepsilon,t} * g \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\hat{g}(\xi)\right)$ presque partout.

En utilisant d) on en déduit que

$$S(t)g = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\hat{g}(\xi)\right) \quad pp$$

et donc $\widehat{S(t)g}(\xi) = e^{-it|\xi|^2}\hat{g}(\xi) \quad pp$

($\mathcal{F}$ isométrie sur L^2)

Encore vrai si $t=0$.

On vient de mq

$$\forall g \in L^1 \cap L^2, \; \widehat{S(t)g} = e^{-it|.|^2}\hat{g} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Or $\|\widehat{S(t)g}\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|S(t)g\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|g\|_{L^2}$

et $\|e^{-it|.|^2}\hat{g}\|_{L^2} = \|\hat{g}\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|g\|_{L^2}$

i.e. on a continuité en norme L^2.

Par densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2, on en déduit que

$$\forall g \in L^2, \; \widehat{S(t)g} = e^{-it|.|^2}\hat{g} \; \forall t \in \mathbb{R}.$$

f) Soit $s, t \in \mathbb{R}$, $g \in L^2$. On raisonne sur les transformées de Fourier : $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{S(t+s)g}(\xi) = e^{-i(t+s)|\xi|^2}\hat{g}(\xi)$$
$$= e^{-it|\xi|^2}\left(e^{-is|\xi|^2}\hat{g}(\xi)\right)$$
$$= e^{-it|\xi|^2}\,\widehat{S(s)g}(\xi)$$
$$= \widehat{S(t)S(s)g}(\xi)$$

Ainsi $\widehat{S(t+s)g} = \widehat{S(t)S(s)g}$

et par injectivité de $\mathcal{F}$, $S(t+s)g = S(t)S(s)g$.

g) Comme $S(0) = \mathrm{Id}$, on en déduit

$$S(t)S(-t) = S(-t)S(t) = S(0) = \mathrm{Id}$$

i.e. $S(t)^{-1} = S(-t)$

Ainsi $S(t)$ isométrie, inversible donc unitaire.

h) Soit $t \neq 0$. Par convolution, si $g \in L^1$,

$$\|S(t)g\|_{L^\infty} \leq \|\phi_t\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}$$
$$\leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{\frac{n}{2}}}\|g\|_{L^1}.$$

donc $S(t) : L^1 \to L^\infty$ continue et $\|S(t)\|_{L^1,L^\infty} \leq 1/(4\pi|t|)^{\frac{n}{2}}$

3) a) Soit $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $u(t,\cdot) = S(t)g$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}_*^+$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$\|u(t,\cdot)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L^2}$ par 2)c)

donc $\|u\|_{L^2([-t_0,t_0]\times\mathbb{R}^n)} \leq 2t_0 \|g\|_{L^2} < +\infty$.

Ainsi $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$.

b) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. Alors $\operatorname{supp}\varphi \subset [-T,T]\times\overline{B}(0,M)$

On a à t fixé, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(\partial_t\varphi(t,\cdot))(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\,\partial_t\varphi(t,x)\,dx.$$

$$= \int_{\overline{B}(0,M)} e^{-ix.\xi}\,\partial_t\varphi(t,x)\,dx$$

Comme $|\partial_t(e^{-ix.\xi}\varphi(t,x))| \leq \|\partial_t\varphi\|_{L^\infty}\mathbb{1}_{\overline{B}(0,M)}(x)$

on peut écrire

$$\underline{\mathcal{F}_{x\to\xi}(\partial_t\varphi(t,\cdot))(\xi)} = \partial_t\left(\int_{\overline{B}(0,M)} e^{-ix.\xi}\varphi(t,x)\,dx\right)$$

$$= \underline{\partial_t\psi(t,\xi)}$$

où $\psi(t,\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}\varphi(t,\cdot)(\xi)$.

De plus, comme $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, à t fixé $x \mapsto \varphi(t,x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et on a vu que $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}_x\left(\Delta_x\varphi(t,x)\right)(\xi) = -|\xi|^2 \mathcal{F}_x\varphi(t,\cdot)(\xi)$$
$$= -|\xi|^2 \psi(t,\xi)$$

On fixe $t\in\mathbb{R}$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi)\, e^{-it|\xi|^2}\left(\partial_t\psi(t,-\xi) - i|\xi|^2\psi(t,-\xi)\right) d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x u(t,\cdot)(\xi)\left(\mathcal{F}_x\left(\partial_t\varphi(t,\cdot) + i\Delta_x\varphi(t,\cdot)\right)(-\xi)\right) d\xi$$

par 2)e) et ce qui précède

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x u(t,\cdot)(\xi)\, \overline{\mathcal{F}_x\left(\partial_t\overline{\varphi}(t,\cdot) - i\Delta_x\overline{\varphi}(t,\cdot)\right)(\xi)}\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\, \overline{\left(\partial_t\overline{\varphi}(t,x) - i\Delta_x\overline{\varphi}(t,x)\right)}\, dx$$

par Parseval bilinéaire (les fonctions sont bien dans $L^2(\mathbb{R}^n)$)

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\left(\partial_t\varphi(t,x) + i\Delta_x\varphi(t,x)\right) dx$$

Comme $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, on peut intégrer en temps sans difficulté :

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) e^{-it|\xi|^2} \left(\partial_t \psi(t,-\xi) - i|\xi|^2 \psi(t,-\xi)\right) d\xi dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} u(t,x) \left(\partial_t \varphi(t,x) + i \Delta_x \varphi(t,x)\right) dx dt$$

Or u solution faible ssi $i\partial_t u + \Delta_x u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$

($u \in L^1_{loc}$ donc on peut lui associer une distribution)

ssi $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $\langle u, -i\partial_t \varphi + \Delta_x \varphi \rangle = 0$

ssi ——————————— $\langle u, \partial_t \varphi + i \Delta_x \varphi \rangle = 0$

ssi $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} u(t,x) \left(\partial_t \varphi(t,x) + i \Delta_x \varphi(t,x)\right) dx dt = 0$$

d'où u solution faible

ssi $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) e^{-it|\xi|^2} \left(\partial_t \psi(t,-\xi) - i|\xi|^2 \psi(t,-\xi)\right) d\xi dt = 0$$

c) Soit $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi)\, e^{-it|\xi|^2} \left(\partial_t \varphi(t,-\xi) - i|\xi|^2 \varphi(t,\xi)\right) d\xi\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) \Bigg(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \partial_t \left[e^{-it|\xi|^2} \varphi(t,-\xi) \right] dt}_{=0 \text{ car } \varphi \text{ à support compact en } t.} \Bigg) d\xi \quad \text{(Fubini OK ici)}$$

$= 0$

donc par b), u est solution faible de (P).

De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\|u(t,.) - g\|_{L^2} = \|\widehat{S(t)g} - \hat{g}\|_{L^2} \cdot (2\pi)^{n/2} \quad \text{(Plancherel)}$$

$$= \left\|\left(e^{-it|\xi|^2} - 1\right)\hat{g}\right\|_{L^2} \cdot (2\pi)^{n/2}$$

par convergence dominée, $\|u(t,.) - g\|_{L^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

d) Pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}$,

$$\|u(t,.) - u(s,.)\|_{L^2} = \left\|\left(e^{-it|\xi|^2} - e^{-is|\xi|^2}\right)\hat{g}\right\|_{L^2} (2\pi)^{n/2}$$

$$= \left\|\left(e^{-i(t-s)|\xi|^2} - 1\right)\hat{g}\right\|_{L^2} (2\pi)^{n/2}$$

d'où la continuité de $u : \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R}^n)$.