Université Lyon 1 Année 2013-2014
Master Mathématiques Générales 1ère année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

Devoir Maison 4.
– à rendre le 12 mai 2014 –

Exercice 1. (*Equations de transport : inégalité d'Oleinik*)

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x\Big(F\big(u(t,x)\big)\Big) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

où $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions données. On suppose que F est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et on note $c = F'$.

On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F''(x) \geq \alpha$.

1. *Préliminaire 1.* Soit β un réel > 0. On considère l'équation différentielle ordinaire suivante
$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) = -\beta v(t)^2,\ t \geq 0 \\ v(0) \in \mathbb{R} \text{ donné.} \end{cases} \tag{2}$$
   (a) Montrer que pour toute donnée initiale $v(0)$ l'équation (2) admet une unique solution définie sur un intervalle maximal $[0, T[$.
   (b) Calculer explicitement cette solution ainsi que T en fonction de β et $v(0)$.
2. *Préliminaire 2.*
   (a) Montrer que c est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On notera g son inverse.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \leq \dfrac{1}{\alpha}$.
3. *Solutions classiques.* On suppose dans cette question que u_0 est de classe $\mathcal{C}^2$, bornée et à dérivée u_0' bornée sur $\mathbb{R}$. On suppose que u est une solution de classe $\mathcal{C}^2([0, T^*[\times\mathbb{R})$ de (1) où
$$T^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } c(u_0) \text{ croissante} \\ -\dfrac{1}{\inf_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}(c(u_0))} & \text{sinon} \end{cases} \tag{3}$$
   (a) Ecrire l'équation satisfaite par $\partial_x u(t,x)$.
   (b) On fixe $x \in \mathbb{R}$. On pose $v(t) = \partial_x u(t, X(t,x))$ Montrer que v est solution de
$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) = -F''(u_0(x)) v(t)^2, \\ v(0) = u_0'(x). \end{cases} \tag{4}$$

En déduire l'expression de v en fonction de x, u_0, f. Vérifier que cette solution est bien définie sur $[0, T^*[$ et montrer que

$$v(t) \leq \frac{1}{\alpha t} \quad \forall t \in]0, T^*[.$$

(c) Montrer que pour tout $t \in]0, T^*[$, tout $x \in \mathbb{R}$, $\partial_x u(t,x) \leq \dfrac{1}{\alpha t}$.

(d) En déduire que pour tout $t \in]0, T^*[$, il existe une constante $C(t) \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x > y$,

$$u(t,x) - u(t,y) \leq C(t)(x-y). \tag{5}$$

On dit que u satisfait une inégalité d'Oleinik.

4. *Solutions faibles.* On considère la donnée initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{6}$$

(a) On suppose d'abord $u_g > u_d$. Montrer que la solution *onde de choc* (dont on donnera l'expression) satisfait une inégalité d'Oleinik.

(b) On suppose dans la suite de l'exercice que $u_g < u_d$. Montrer que dans ce cas la solution faible "onde de choc" ne satisfait pas d'inégalité d'Oleinik.

(c) Calculer la solution *onde de détente*. Montrer qu'elle satisfait une inégalité d'Oleinik.
On pourra utiliser le préliminaire 2.

Exercice 2. (*Principe du min-max*)

Rappels. Les résultats suivants seront utiles pour étudier les convergences de suites dans $L^2(I)$ et $H_0^1(I)$:

- *l'injection $H_0^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$ est compacte : de toute suite bornée dans $H_0^1(I)$ on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(I)$.*
- *dans un Hilbert H, toute suite $(u_n)_n$ bornée dans H admet une sous-suite qui converge faiblement dans H : il existe $u \in H$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijection croissante tels que $\langle u_{\varphi(n)}, v\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle u, v\rangle \ \forall v \in H$.*

On note $I =]-1, 1[$ et pour $u : I \to \mathbb{R}$, $x \in I$,

$$Lu(x) := -\frac{d}{dx}\big(a(x)u'(x)\big) + q(x)u(x).$$

On s'intéresse au problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} Lu = \lambda u \text{ dans } I \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

On suppose que

- $a \in L^\infty(I)$ et que de plus, il existe $\alpha > 0$ tels que $a(x) \geq \alpha \ \forall x \in I$,
- $q \in L^\infty(I)$ et $q \geq 0$.

1. On fixe λ. Ecrire la formulation variationnelle du problème (7).
2. Vérifier que si $u \in H_0^1(I)$, Lu a bien un sens dans $\mathcal{D}'(I)$.
3. On définit la forme quadratique Q sur $H_0^1(I)$ par

$$\forall u \in H_0^1(I), \quad Q(u) = \int_I a(x)\big(u'(x)\big)^2 dx + \int_I q(x)u(x)^2 dx,$$

et le quotient de Rayleigh J par

$$\forall u \in H_0^1(I),\ u \neq 0, \quad J(u) = \frac{Q(u)}{\|u\|_{L^2}^2}.$$

4. Montrer que J est minoré sur $H_0^1(I) \setminus \{0\}$. On pose

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(I) \setminus \{0\}} J(u).$$

On rappelle l'inégalité de Poincaré : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(I)$, $\|u\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2}$.

5. Montrer que toute valeur propre de L sur $H_0^1(I)$ vérifie $\lambda \geq \lambda_1$.
6. Le but de cette question est de montrer que λ_1 est la plus petite valeur propre de L, *i.e.* il existe $u_1 \in H_0^1(I)$ telle que

$$Lu_1 = \lambda_1 u_1.$$

(a) Soit $(v_n)_n$ une suite minimisante

$$\forall n,\ v_n \in H_0^1(I),\ \|v_n\|_{L^2} = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} J(v_n) = \lambda_1.$$

Montrer que $(v_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(I)$ et que, quitte à extraire, $(v_n)_n$ converge dans $L^2(I)$. On note u_1 sa limite.

(b) En utilisant l'identité du parallèlogramme $Q\left(\frac{f+g}{2}\right)+Q\left(\frac{f-g}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(Q(f)+Q(g)\right)$, montrer que $(v_n)_n$ est de Cauchy dans $H_0^1(I)$. En déduire que $Q(u_1) = \lambda_1$.

(c) Montrer que $\|u_1\|_{L^2} = 1$ et $Lu_1 = \lambda_1 u_1$.
Indication. À $v \in H_0^1(I)$ fixé, étudier la fonction $t \mapsto J(u_1 + tv)$.

7. *Autres valeurs propres.* On raisonne par récurrence. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons construits $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et $u_1, \dots, u_p$. On pose

$$\lambda_{p+1} = \inf\{J(u) \,|\, u \in H_0^1(I), u \neq 0, u \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp\}$$

Montrer que λ_{p+1} est atteint pour une fonction $u_{p+1} \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp$ qui vérifie

$$\|u_{p+1}\|_{L^2} = 1 \text{ et } Lu_{p+1} = \lambda_{p+1}u_{p+1}.$$

8. Vérifier que $(\lambda_p)_p$ est croissante.

9. Montrer que $(u_p)_p$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(I)$.
10. Montrer que $\lim_{p\to\infty} \lambda_p = +\infty$.

    On raisonnera par l'absurde. Montrer que si $(\lambda_p)_p$ est bornée, alors $(u_p)_p$ est bornée dans $H_0^1(I)$, et obtenir une contradiction avec le résultat de la question 9.
11. Montrer que $(u_p)_p$ est une base orthonormée (hilbertienne) de $L^2(I)$.
12. Montrer que $Q(u) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \lambda_p \left| \langle u, u_p \rangle_{L^2} \right|^2$ pour tout $u \in H_0^1(I)$.
13. *Principe du min-max.*
    (a) Soit F un sous-espace de dimension p de $H_0^1(I)$. Montrer qu'il existe $v \in F$ tel que $J(v) \geq \lambda_p$.
    (b) En déduire la principe du "min-max"

$$\lambda_p = \min_{\substack{F \text{ sev } \subset H_0^1(I) \\ \dim F = p}} \left(\max_{\substack{u \in F \\ u \neq 0}} J(u) \right).$$