Université Lyon 1 Année 2013-2014
Master Mathématiques Générales 1ère année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

**Feuille 3**

## Résolvante du laplacien

Dans les exercices qui suivent, on s'intéresse à la résolution de l'équation suivante, où $\lambda > 0$ :

$$\lambda w(x) - \Delta w(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et $f$ est donnée.

**Exercice 1.** (*Raisonnement formel, transformée de Laplace*)
On commence par un raisonnement formel pour deviner la forme de la solution, on justifiera le résultat dans l'exercice suivant.

1. On suppose que $u(t,x)$ est solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0 & \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Montrer que $w(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} u(t,x)dt$ est solution de (**??**).
*Remarque. À $x$ fixé, $\lambda \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} u(t,x)dt$ est la transformée de Laplace en temps de $u$.*

2. En déduire l'écriture de $w$ sous la forme

$$w = K * f, \text{ où } K(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)} dt. \tag{2}$$

**Exercice 2.** (*Résolvante du laplacien*)

1. *Propriétés de $K$.* Montrer que $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\hat{K}(\xi) = \dfrac{1}{\lambda + |\xi|^2}$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $w$ définie par la formule (**??**).
   (a) Montrer que $w$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Montrer que $w$ est solution de (**??**).
   *Indication. Calculer $\mathscr{F}(\lambda w - \Delta w)$.*

**Distributions.**

**Exercice 3.** (*Masse de Dirac*)
Pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, on définit la masse de Dirac en $b$ par

$$\delta_b : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad \delta_b(\varphi) = \varphi(b).$$

1. Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, $\delta_b$ est une distribution sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $b \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $f\delta_b$ est une distribution sur $\mathbb{R}^n$ et que

$$f\delta_b = f(b)\delta_b.$$

**Exercice 4.** (*Valeur principale*)

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & |x| \geq \varepsilon \\ 0, & |x| < \varepsilon \end{cases}$
   Montrer que $f_\varepsilon$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$ (*i.e.* un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$), notée $T_{f_\varepsilon}$.
2. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} T_{f_\varepsilon}(\varphi)$ existe dans $\mathbb{R}$. *La distribution ainsi obtenue est appelée valeur principale, et notée vp* $\left(\frac{1}{x}\right)$ :

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

**Exercice 5.** (*Multiplication d'une distribution par une fonction* $\mathcal{C}^\infty$)
Montrer que $x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

**Exercice 6.**
Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1}{x + i\varepsilon} = \mathrm{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right) - i\pi\delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

**Exercice 7.** (*Dérivées de distributions, exemples*)
Calculer la dérivée au sens des distributions des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto |x|$, définie sur $\mathbb{R}$.
2. $x \mapsto \sqrt{x_+}$, définie sur $\mathbb{R}$.
3. signe, définie sur $\mathbb{R}$.
4. $x \mapsto \ln|x|$, définie sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 8.**

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$. Montrer que pour tout $1 \leq j \leq n$, la dérivée au sens des distributions $\partial_j f$ existe et est égale à la dérivée usuelle $\partial_j f$.
2. Montrer qu'une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ a une dérivée au sens des distributions qui coïncide avec sa dérivée usuelle.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. On suppose de plus que sa dérivée usuelle $f'$ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Montrer que $f'$ est la dérivée au sens des distributions de $f$.

**Exercice 9.**

1. Soit $n \geq 2$, $1 \leq j \leq n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$. On suppose de plus que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $\partial_j f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (dérivée usuelle). Montrer que $\partial_j f$ est la dérivée partielle au sens des distributions de $f$ par rapport à $x_j$.
2. *Exemples.*
   (a) Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, $\partial_j h(x) = -\dfrac{x_j}{|x|^3}$.
   (b) Etudier l'existence des dérivées dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{|x|^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Exercice 10.** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f \in L^1_{loc}(I)$. On suppose que la dérivée au sens des distributions de $f$ est nulle dans $I$. Montrer que $f$ est constante dans $I$.

**Exercice 11.** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$.

1. Soit $g \in L^1_{loc}(I)$, $C \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = C + \displaystyle\int_a^x g(t)dt$, pour tout $x \in I$. Montrer que $f \in L^1_{loc}(I)$ et $f' = g$.
2. Réciproquement, soit $f, g \in L^1_{loc}(I)$ telles que $f' = g$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = C + \displaystyle\int_a^x g(t)dt$, pp sur $I$.

**Exercice 12.** (*Equation différentielle dans $\mathcal{D}'$*)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $u' + \alpha u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe une constante $C$ telle que $u(t) = Ce^{-\alpha t}$.