Université Lyon 1 Année 2013-2014
Master Mathématiques Générales $1^{\text{ère}}$ année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

Feuille 4. Intégration

Notations

- $n \in \mathbb{N}^*$
- λ_n est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.
- $\mathscr{H}^k$ est la mesure de Hausdorff k-dimensionnelle.
- Cas particulier : $\mathscr{H}^1$ est la mesure de longueur. Donc $\displaystyle\int_\Gamma f(x)\, d\mathscr{H}^1(x) = \int_\Gamma f\, d\ell$, avec Γ une courbe et $d\ell$ l'intégrale de longueur.
- Cas particulier : $\mathscr{H}^2$ est la mesure de surface. Donc $\displaystyle\int_S f(x)\, d\mathscr{H}^2(x) = \int_S f\, ds$, avec S une surface et ds l'intégrale de surface.
- La norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$ est désignée par $x \mapsto |x|$.
- $B(x,r)$ et $S(x,r)$ sont respectivement la boule ouverte et la sphère centrées en x et de rayon r dans $\mathbb{R}^n$ (par rapport à la norme euclidienne standard).
- $\omega_n = \lambda_n(B(0,1))$ (=volume de la boule unité).
- $\sigma_n = \mathscr{H}^{n-1}(S(0,1))$ (=superficie de la sphère unité).

Exercice 1. (*Paramétrisations concrètes*)
Donner des formules pour :

1. $\displaystyle\int_{x+y=1} f(x,y)\, d\ell$.
2. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}(0,1)} f(x,y)\, d\ell$.
3. (Dans $\mathbb{R}^3$) $\displaystyle\int_{S(0,1)} f(x,y,z)\, ds$.
4. L'intégrale sur un k-plan dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. (*Changements de coordonnées sphériques généralisées*)
Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

1. Si f est $\mathscr{H}^{n-1}$-intégrable ou mesurable positive sur $S(x,r)$, montrer l'identité
$$\int_{S(x,r)} f\, d\mathscr{H}^{n-1} = r^{n-1} \int_{S(0,1)} f(x+ry)\, d\mathscr{H}^{n-1}(y).$$
2. Si f est λ_n-intégrable ou mesurable positive sur $B(x,r)$, montrer l'identité
$$\int_{B(x,r)} f\, d\lambda_n = r^n \int_{B(0,1)} f(x+ry)\, d\lambda_n(y).$$
3. Calculer $\lambda_n(B(x,r))$ et $\mathscr{H}^{n-1}(S(x,r))$ en fonction de ω_n et σ_n.

4. Généralisation des propriétés 1. et 2. ?

Exercice 3. (*Intégrales de référence*)

Déterminer pour quelles valeurs du paramètre a les intégrales suivantes sont finies :

1. $\displaystyle\int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^a}\, dx.$
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \frac{1}{|x|^a}\, dx.$

Exercice 4. (*Formules de ω_n et σ_n*)

En calculant de deux manières différentes $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx$, montrer les identités suivantes :

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \qquad \omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Donner l'expression de ces quantités selon la parité de n.
On rappelle que la fonction Γ d'Euler est donnée par

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx, \qquad t > 0,$$

et que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 5. (*Propriétés de la mesure superficielle sur la sphère*)

Soit A une partie borélienne de $S(0,1)$. Soit $B = B(A) = \displaystyle\bigcup_{0 \le t \le 1} tA$.

1. Montrer que B est une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathscr{H}^{n-1}(A) = n\lambda_n(B)$.
2. En déduire que $\sigma_n = n\omega_n$.
3. Soit $R \in \mathcal{O}(n)$. Déterminer $B(R(A))$. En déduire que la mesure sur la sphère $S(0,1)$ est invariante par isométries linéaires.
4. Soit $f : S(0,1) \to \mathbb{R}$ intégrable et impaire par rapport à l'une des coordonnées. Montrer que $\displaystyle\int_{S(0,1)} f(x)\, d\mathscr{H}^{n-1}(x) = 0.$
5. Calculer $\displaystyle\int_{S(0,1)} x_1^2\, d\mathscr{H}^{n-1}(x).$

Exercice 6. (*Mesure d'un cône*)

Calculer la superficie du cône circulaire droit

$$\mathscr{C} := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, x_n + \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2} = 1, 0 \le x_n \le 1\}.$$

Exercice 7. (*Intégration par parties*)

Soient $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ un ouvert lipschtzien, et $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$. On suppose que soit Ω est relativement compact, soit l'une des fonctions f ou g est à support compact. Montrer la formule d'intégration par parties

$$\int_\Omega f \partial_j g = \int_{\partial\Omega} \nu_j f g \, d\mathscr{H}^{n-1} - \int_\Omega g \partial_j f.$$

Exercice 8. (*Formules de Green*)

Soient Ω un ouvert borné de classe C^1 et $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Montrer les identités suivantes :

1. $\displaystyle\int_\Omega u\Delta v = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ (*première formule de Green*)
2. $\displaystyle\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)$ (*deuxième formule de Green*).

Exercice 9. (*Aire d'un domaine délimité par une courbe*)

Soit Γ une courbe simple dans le plan, délimitant un domaine Ω de classe C^1. On considère, sur Γ, l'orientation positive par rapport à Ω. En utilisant le théorème flux-divergence

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{f} = \int_\Gamma \vec{n} \cdot \vec{f}$$

pour un choix convenable du champ de vecteurs $\vec{f}$, montrer la formule suivante

$$\operatorname{aire}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_\Gamma (x\, dy - y\, dx).$$

Exercice 10. (*Formules de la moyenne*)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que la fonction $G :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $r > 0$ par
$$G(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{S(0,r)} f(x)\, d\mathscr{H}^{n-1}(x)$$
est de classe C^1 et que $\displaystyle G'(r) = \frac{1}{r^n} \int_{S(0,r)} x \cdot \nabla f(x)\, d\mathscr{H}^{n-1}(x)$ pour tout $r > 0$.
2. En déduire que $\displaystyle G'(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B(0,r)} \Delta f(x)\, dx$ pour tout $r > 0$.
3. Établir la *première formule de la moyenne* : si $f \in C^2(B(0,R)) \cap C(\overline{B}(0,R))$ est harmonique (càd solution de $\Delta f = 0$ dans Ω), alors
$$f(0) = \frac{1}{\mathscr{H}^{n-1}(S(0,R))} \int_{S(0,R)} f(x)\, d\mathscr{H}^{n-1}(x).$$
4. Établir la *deuxième formule de la moyenne* : si $f \in C^2(B(0,R)) \cap C(\overline{B}(0,R))$ est harmonique, alors
$$f(0) = \frac{1}{\lambda_n(B(0,R))} \int_{B(0,R)} f(x)\, d\lambda_n(x).$$

5. En déduire le *principe du maximum (minimum)* : si une fonction harmonique dans un ouvert connexe admet un point de maximum (minimum), alors elle est constante.
6. En déduire l'unicité de la solution du *problème de Dirichlet* : si Ω est un ouvert borné, alors le problème $\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$ a au plus une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Exercice 11. (*Identité de Pohozaev*)
Soit Ω un ouvert de classe C^1.
Notations.
Si $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et $x \in \partial\Omega$, on note par
- $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x)$ la "dérivée normale" de u au point x
- $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}(x) = \nabla u(x) - \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) \cdot \nu(x)$ le "gradient tangentiel" de u au point x. Autrement dit : $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$ est la projection orthogonale de ∇u sur $\nu^{\perp}$.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ telle que $\Delta u = f'(u)$ dans $\overline{\Omega}$.

1. En multipliant l'équation $\Delta u = f'(u)$ par $x \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^{n} x_j \partial_j u$, obtenir l'*identité de Pohozaev*
$$\begin{aligned} &\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + n \int_{\Omega} f(u) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left\{ x \cdot \nu f(u) - \frac{1}{2} x \cdot \nu \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 + \frac{1}{2} x \cdot \nu \left| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|^2 - \frac{\partial u}{\partial \nu} x \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau} \right\}. \end{aligned}$$
2. *Application.* Montrer que, si Ω est une boule, alors la seule solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$ du problème $\begin{cases} \Delta u = u^3 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$ est $u \equiv 0$.

Exercice 12. (*formule de la co-aire*)
Soit Ω un ouvert. Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sans point critique. Montrer que pour toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ "convenable" (on précisera le sens du mot) on a la *formule de la co-aire*
$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\{\varphi = t\}} f \, d\mathscr{H}^{n-1} \, dt = \int_{\Omega} f |\nabla \varphi| \, d\lambda_n.$$

Exercice 13. (*le rôle de la solution fondamentale*)
Soit, pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
$$\Gamma_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|, & \text{si } n = 2 \\ -\dfrac{1}{(n-2)\sigma_n |x|^{n-2}}, & \text{si } n \geq 3 \end{cases}.$$

(Γ_n est la *solution fondamentale* de Δ.)

(1) Montrer l'identité $\Gamma_n * (\Delta\varphi) = \varphi$, $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(2) Montrer que, si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $n \geq 3$, alors l'équation $\Delta u = f$ a exactement une solution $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

Exercice 14. (*le rôle de la fonction de Green*)

Soit Ω un ouvert borné de classe C^2. On suppose que, pour tous $f \in C^1(\overline{\Omega})$ et $\varphi \in C^3(\partial\Omega)$, il y a une solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$ du problème $(P)\begin{cases}\Delta u = f & \text{dans } \Omega\\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega\end{cases}$.

Soit, pour $x \in \Omega$, $g(x,\cdot)$ la solution du problème (P) pour $f = 0$ et $\varphi = -\Gamma_n(x-\cdot)$. On pose $G(x,y) := \Gamma_n(x-y) + g(x,y)$, $\forall\, x, y \in \Omega$. ($G$ est la *fonction de Green* de Ω.)

Montrer que la solution de (P) si $\varphi = 0$, c'est-à-dire de $\begin{cases}\Delta u = f & \text{dans } \Omega\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\end{cases}$, est donnée par la formule $u(x) = \displaystyle\int_\Omega G(x,y) f(y)\, dy$, $\forall\, x \in \Omega$.

Autrement dit : si on sait résoudre (P) pour $f = 0$ et φ quelconque, alors on sait résoudre (P) pour $\varphi = 0$ et f quelconque.