Université Lyon 1 Année 2013-2014
Master Mathématiques Générales 1ère année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

Feuille 5 - Laplacien

Exercice 1. (*Formule de Poisson dans une boule*)

Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $n \geq 2$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$. Soit $f \in \mathcal{C}\big(S(x_0,R)\big)$. On définit*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x-x_0|^2}{\sigma_n R} \displaystyle\int_{S(x_0,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^n} d\mathscr{H}^{n-1}(y) & x \in B(x_0,R), \\ f(x) & x \in S(x_0,R). \end{cases}$$

Alors,

1. $u \in \mathcal{C}^\infty(B(x_0,R)) \cap \mathcal{C}(\overline{B}(x_0,R))$

2. u est solution de $\begin{cases} \Delta u = 0 & B(x_0,R) \\ u = f & S(x_0,R) \end{cases}$.

1. *Propriétés du noyau de Poisson.* On définit pour tout $x \in B(0,R)$, tout $y \in S(0,R)$, $P(x,y) = \dfrac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R |x-y|^n}$.
   (a) Montrer que P est $\mathcal{C}^\infty$, strictement positif et que $\Delta_x P = 0$.
   (b) On pose pour tout $x \in B(0,R)$, $S(x) = \displaystyle\int_{S(0,R)} P(x,y) d\mathscr{H}^{n-1}(y)$.
      i. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $B(0,R)$, et que $\Delta S = 0$.
      ii. Montrer que $S(x)$ ne dépend que de $|x|$. *On calculera $S(Ax)$ pour A orthogonale.*
      iii. En déduire que S est constante sur $B(0,R)$, égale à 1.
2. Montrer le théorème.

Exercice 2. (*Lemme de Hopf*)

Dans cet exercice, on démontre le résultat suivant

Lemme de Hopf. *Soit B une boule de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \partial B$. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2(B)$, sur-harmonique : $-\Delta u \geq 0$ dans B. On suppose de plus $u \in \mathcal{C}^1(\overline{B})$ et $u(x) > u(x_0)$ pour tout $x \in B$. Alors*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \nabla u(x_0) \cdot \nu(x_0)$ et $\nu(x_0)$ est le vecteur normal extérieur unitaire à B en x_0.

Sans perte de généralité, on suppose pour faire la preuve $B = B(0,R)$ et $u(x_0) = 0$. On définit pour deux paramètres à fixer $\varepsilon > 0$ et $a > 0$,

$$\text{pour tout } x \in \bar{B},\ v(x) = e^{-a|x|^2} - e^{-aR^2},\ \text{ et } w(x) = u(x) - \varepsilon v(x).$$

On note $U = B(0,R) \setminus \bar{B}(0,R/2)$.

1. Montrer que l'on peut choisir les paramètres ε et a tels que $w \geq 0$ sur ∂U et $-\Delta w \geq 0$ dans U.
2. En déduire que x_0 est un point de minimum global de w dans $\overline{U}$.
3. En déduire $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) \leq 0$.
4. Conclure.

Exercice 3. (*Principe des singularités artificielles (ou effaçables)*)

Soit $n \geq 2$. On note pour $r > 0$, $\Gamma_n(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln r & \text{si } n = 2 \\ \dfrac{-1}{(n-2)\sigma_n r^{n-2}} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $E(x) = \Gamma_n(|x|)$, la solution fondamentale du laplacien.

Soit $u \in \mathcal{C}^2(B(0,R) \setminus \{0\})$ une fonction harmonique : $\Delta u = 0$ sur $B(0,R) \setminus \{0\}$. On suppose de plus que u est bornée ou plus généralement que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{E(x)} = 0$.

1. On suppose d'abord de plus que $u = 0$ sur $S(0,R/2)$. En appliquant le principe du maximum sur $B(0,R/2) \setminus \bar{B}(0,\delta)$ et en faisant tendre δ vers 0, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, tout $x \in B(0,R) \setminus \{0\}$,

$$u(x) \leq \varepsilon \Big(\Gamma_n(R/2) - E(x) \Big).$$

   En déduire que $u = 0$ dans $B(0,R) \setminus \{0\}$.
2. Sans supposer $u = 0$ sur $S(0,R/2)$, montrer que u admet un prolongement par continuité en 0, et que ce prolongement est harmonique dans $B(0,R)$.

Exercice 4. (*Contre-exemple de Weierstrass*)

Soit $n \geq 2$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Quitte à translater on peut supposer que $0 \in \Omega$. On définit

$$v = B(0,1) \to \mathbb{R},\ v(x) = \begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)|\ln(|x|^2)|^\alpha & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

où $0 < \alpha < 1$.

1. (a) Montrer que v est continue sur $B(0,1)$, et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $B(0,1) \setminus \{0\}$.
   (b) Montrer que v n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $B(0,1)$, mais que Δv se prolonge par continuité en 0.
2. En utilisant la fonction v ci-dessus, construire une fonction $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ telle qu'il n'existe pas de fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f$ dans Ω.

Exercice 5. (*Inégalités de Harnack*)

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et u une fonction harmonique et positive dans Ω. Soit $x, y \in \Omega$. On suppose qu'il existe $r, R > 0$ tels que $B(x,r) \subset B(y,R) \subset\subset \Omega$. Montrer que
$$u(x) \leq \left(\frac{R}{r}\right)^n u(y).$$
2. En déduire le *Théorème de Liouville* : Une fonction harmonique et minorée (respectivement majorée) sur $\mathbb{R}^n$ tout entier est constante.
3. Le but de cette question est de montrer l'inégalité de Harnack suivante :
   Théorème. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Soit K un compact $\subset \Omega$. Il existe une constante C ne dépendant que de n, Ω et K, telle que pour tout $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonique et positive,*
$$\max_K u \leq C \min_K u.$$
   (a) Montrer le résultat dans le cas où $K = \overline{B}(x_0, R)$ avec R tel que $\overline{B}(x_0, 4R) \subset \Omega$.
   (b) *Préliminaires topologiques dans le cas général.*
      i. Soit $0 < R < \dfrac{1}{4} d(K, \partial\Omega)$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{N}^*$, et $(x_i)_{1 \leq i \leq M}$ M points de K tels que $K \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{M} B(x_i, R)$ et $\overline{B}(x_i, 4R) \subset \Omega$.
      ii. Montrer qu'il existe un compact L connexe par lignes polygonales avec $K \subset L \subset \Omega$.
      Indication. Prendre $L = \left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{M} \overline{B}(x_i, R)\right) \cup \left(\displaystyle\bigcup_{1 \leq i < j \leq M} \gamma_{ij}\right)$ *où* $\gamma_{ij} \subset \Omega$ *est une ligne polygonale de* x_i *à* x_j.
      iii. Soit $\mathcal{C} = \gamma([0,1])$ une courbe compacte de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathcal{C} \subset \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i$, ω_i ouverts. Montrer qu'il existe $P \leq N+1$, P réels $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_P = 1$ et $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, N\}$ tels que
      – $\gamma(0) \in \omega_{i_0}$
      – $\gamma(t_j) \in \omega_{i_{j-1}} \cap \omega_{i_j}$ pour $1 \leq j \leq P$.
      Indication. Considérer i_0 *tel que* $\gamma(0) \in \omega_{i_0}$ *et* $\tau = \sup\{t \in [0,1]; \gamma(t) \in \omega_{i_0}\}$.
   (c) Montrer l'inégalité de Harnack. *Indication. Remplacer K par L, puis considérer x (resp. y) point de maximum (resp. minimum) de u sur L, et les relier par une ligne polygonale.*