Feuille 9 - Théorie de Lax-Milgram, formulation variationnelle de problèmes elliptiques, séparation de variables

Trace de fonctions intégrables

Exercice 1.

Montrer qu'il n'y a pas de notion de trace pour des fonctions $L^2(\Omega)$, *i.e.* qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in L^2(\Omega)$,

$$\|v_{|\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Considérer le cas $\Omega = B(0,1)$ et construire une suite $(v_n)_n$ de fonctions régulières, telle que $\forall n,\ v_n = 1$ sur la sphère unité et $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} \to 0$.

Théorie de Lax-Milgram

Exercice 2.

Soit V un espace de Hilbert réel, de produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, de norme $\|\cdot\|$. On considère le problème suivant

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,v) = L(v) \quad \forall\, v \in V. \tag{1}$$

Les hypothèses faites sur a et L sont

(i) L est une forme linéaire continue sur V, *i.e.* $L : V \to \mathbb{R}$ est linéaire et il existe $C \geq 0$ tel que
$$|L(v)| \leq C\|v\| \quad \forall\, v \in V$$

(ii) a est une forme bilinéaire continue sur V, *i.e.* $a : V \times V \to \mathbb{R}$ est bilinéaire et il existe $M \geq 0$ tel que
$$|a(w,v)| \leq M\|w\|\|v\| \quad \forall\, w, v \in V$$

(iii) a est coercive, *i.e.* il existe $\nu > 0$ tel que
$$a(v,v) \geq \nu\|v\|^2 \quad \forall\, v \in V.$$

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Lax-Milgram :

Théorème. *Soit V un espace de Hilbert réel, L une forme linéaire continue sur V et a une forme bilinéaire continue coercive sur V. Alors le problème (1) admet une unique solution. De plus, cette solution dépend continûment de la forme linéaire L.*

1. Montrer qu'il existe $f \in V$ tel que $L(v) = \langle f, v\rangle$ pour tout $v \in V$ et $\|L\|_{V'} = \|f\|_V$.
2. Montrer que pour tout $w \in V$, il existe $A(w) \in V$ tel que $a(w,v) = \langle A(w), v\rangle$ pour tout $v \in V$.

3. Montrer que $A : V \to V$ est un opérateur linéaire et continu.
4. Montrer que A est bijectif et d'inverse continu.
5. Conclure.

Exercice 3.

On reprend le cadre de l'énoncé précédent. On suppose de plus que a est symétrique. On définit l'énergie

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \quad \forall\, v \in V.$$

Montrer que u est solution au problème (1) si et seulement si u est un point de minimum de l'énergie J, *i.e.*

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Formulation variationnelle de problèmes elliptiques

Exercice 4. (*Laplacien + Dirichlet*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné et régulier (de classe $\mathcal{C}^1$). Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème suivant,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

1. Ecrire la formulation variationnelle du problème (2).
2. Montrer que le problème (2) admet une unique solution faible u dans $H_0^1(\Omega)$ et qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de f telle que $\|u\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2}$.
3. Montrer que si $u \in H^2(\Omega)$, alors u est solution du problème initial au sens où

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = 0 & \text{presque partout sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

4. Montrer que (3) est encore vrai sans l'hypothèse suppplémentaire $u \in H^2(\Omega)$.

Exercice 5. (*Une variante du Laplacien + Dirichlet*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ régulier (non nécessairement borné). Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème suivant,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

Reprendre les questions de l'exercice 4 dans ce cadre.

Exercice 6. (*Une variante du Laplacien + Neumann*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ régulier (non nécessairement borné). Soit $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$. On considère le problème suivant,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

Reprendre les questions de l'exercice 4 dans ce cadre.

Exercice 7. (*Laplacien + Neumann : un problème de compatibilité*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné, régulier et connexe. Soit $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$. On considère le problème suivant,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

1. Y-a-t-il unicité d'une solution au problème (6) ?
2. Montrer que s'il existe une solution $u \in H^2(\Omega)$ au problème (6) alors

$$\int_\Omega f(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(x)d\sigma(x) = 0. \tag{7}$$

3. Ecrire la formulation variationnelle du problème (6). Pour cela on introduira l'espace

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \int_\Omega v(x)dx = 0\}.$$

4. Montrer que le problème (6) admet une solution faible u dans $H^1(\Omega)$, unique à l'addition d'une constante près.
   On pourra utiliser l'inégalité de Poincaré-Wirtinger : si Ω est borné et connexe, il existe $C > 0$ tel que pour tout $v \in H^1(\Omega)$.

$$\left\| v - \fint_\Omega v \right\|_{L^2} \leq C\|\nabla v\|_{L^2}. \tag{8}$$

5. Montrer que u est bien solution du problème aux limites initial.
6. Démontrer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger. *On raisonnera par l'absurde.*

Exercice 8. (*Un cas non symétrique : équation de convection-diffusion*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné et régulier. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + b \cdot \nabla u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{9}$$

où le champ de vecteurs $b : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$, borné sur Ω et à divergence nulle : div $b(x) = 0$ $\forall x \in \Omega$.

Reprendre les questions de l'exercice 4 dans ce cadre.

Exercice 9. (*Coefficients variables*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné et régulier. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{10}$$

où $A : \Omega \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est mesurable et

— *uniformément coercive* : il existe $\alpha > 0$ tel que pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \; A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2,$$

— *uniformément bornée* : il existe $\beta > 0$ tel que pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \; |A(x)\xi| \leq \beta |\xi|.$$

Reprendre les questions de l'exercice 4 dans ce cadre.

Exercice 10. (*Un problème perturbé*)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné et régulier. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème suivant pour tout $\varepsilon \in]0,1[$,

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f & \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{11}$$

1. Montrer que le problème (11) admet une unique solution faible u^ε dans $H_0^1(\Omega)$ et que pour tout ε, $\|u^\varepsilon\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$.
2. Montrer que la suite (u^ε) converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers f.
3. Montrer que la suite (u^ε) converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers f.
4. On suppose de plus que $f \in H_0^1(\Omega)$. En utilisant le fait que u^ε est le minimiseur d'une fonctionnelle que l'on précisera, montrer que pour tout ε, $\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2} \leq \|\nabla f\|_{L^2}$.
5. Montrer que (u^ε) converge fortement dans $H_0^1(\Omega)$ vers f.

Séparation de variables

Dans les exercices 11 et 13, on s'intéresse à l'équation de la chaleur sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ borné :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta_x u(t,x) &= & f(t,x) & t > 0, \; x \in \Omega \\ u(t,x) &= & 0 & t \geq 0, \; x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) &= & U_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{12}$$

Exercice 11. (*Un cas particulier*)
On suppose ici $n = 1$ et $\Omega =]0,1[$.

1. *Solutions à variables séparées.* On s'intéresse d'abord au problème

   $$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0 & t > 0, \; x \in \Omega \\ u(t,x) = 0 & t \geq 0, \; x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{13}$$

   On cherche une solution sous la forme $u(t,x) = v(t)\varphi(x)$.
   (a) Ecrire les équations satisfaites par v et φ.
   (b) Déterminer les solutions possibles.
2. *Principe de superposition.*
   (a) Résoudre formellement le problème de Cauchy (12) avec $f = 0$. *On écrira la solution sous la forme d'une série.*

(b) Etudier le cas f quelconque.

Exercice 12. (*Convergences de séries*)
On note $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ et $(e_j)_{j\geq 1}$ les valeurs propres et fonctions propres de l'opérateur $(-\Delta)$ avec condition de Dirichlet sur Ω telles que définies en cours.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(c_j)_{j\geq 1}$ une suite de réels. Soit $(u_j)_{j\geq 1}$ une suite de fontions dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ telle que pour tout $j \geq 1$, tout $t \in I$, $|u_j(t)| \leq c_j$. On pose, pour tout $t \in I$, tout $x \in \Omega$,

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t)e_j(x).$$

1. Montrer que si $\sum_j c_j^2 < \infty$, alors $u \in \mathcal{C}(I, L^2(\Omega))$.
2. Montrer que si $\sum_j \lambda_j c_j^2 < \infty$, alors $u \in \mathcal{C}(I, H_0^1(\Omega))$.
3. Montrer que si $\sum_j \frac{c_j^2}{\lambda_j} < \infty$, alors $u \in \mathcal{C}(I, H^{-1}(\Omega))$.

Exercice 13. (*Cas général*)
Soit $T > 0$. Notons $\Omega_T =]0,T] \times \Omega$, et $\Gamma_T = [0,T] \times \partial\Omega$. On note $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ et $(e_j)_{j\geq 1}$ les valeurs propres et fonctions propres de l'opérateur $(-\Delta)$ avec condition de Dirichlet telles que définies en cours.

On suppose $U_0 \in H^{-1}(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega_T)$. On pose

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(a_j e^{-\lambda_j t} + \int_0^t e^{-\lambda_j (t-s)} f_j(s) ds \right) e_j(x)$$

où $a_j = U_0(e_j)$ et $f_j(t) = \langle f(t,\cdot), e_j \rangle_{L^2(\Omega)}$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{C}(]0,T], H_0^1(\Omega))$.
2. Montrer que $u \in \mathcal{C}([0,T], H^{-1}(\Omega))$ et $u(0,\cdot) = U_0$.
3. Pour tout $j \geq 1$, on note $u_j(t,x) = \left(a_j e^{-\lambda_j t} + \int_0^t e^{-\lambda_j (t-s)} f_j(s) ds \right) e_j(x)$. Montrer que $Lu_j(t,x) = f_j(t)e_j(x)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_T)$.
4. Montrer que $Lu = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_T)$.
5. Montrer qu'il existe une unique solution u à (12) telle que $Lu = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_T)$, $u \in \mathcal{C}(]0,T], H_0^1(\Omega))$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t,\cdot) = U_0$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Exercice 14. (*Equation des ondes*)
On considère l'équation des ondes suivante

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_{tt}^2 u(t,x) - \Delta_x u(t,x) & = & 0 & t > 0,\ x \in \Omega \\ u(t,x) & = & 0 & t \geq 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) & = & U_0(x) & x \in \Omega \\ \partial_t u(0,x) & = & U_1(x) & x \in \Omega \end{array} \right. \tag{14}$$

Reprendre le cadre et la méthode de l'exercice 11 pour obtenir la forme de la solution.