Université Lyon 1 Année 2013-2014
Master Mathématiques Générales $1^{\text{ère}}$ année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

Feuille 6 - Équation de la chaleur et équation des ondes

Équation de la chaleur

On rappelle les notations suivantes :

– pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $T > 0$, on note

$$\Omega_T = \Omega \times]0, T[, \text{ et } \Gamma_T = \big(\Omega \times \{0\}\big) \cup \big(\partial\Omega \times [0, T]\big),$$

– pour $u \in \mathcal{C}^2(\Omega_T)$, $Lu(x,t) = \partial_t u(x,t) - \Delta_x u(x,t)$,

– Boules paraboliques : pour $E(x,t)$ solution fondamentale de l'équation de la chaleur, on note

$$B(x,t;r) = \{(y,s) \,|\, s \leq t, E(x-y, t-s) \geq 1/r^n\}.$$

Exercice 1. (*Principe du maximum rétrograde*)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On suppose de plus que Ω est *convexe* (le résultat qui suit reste valide dans le cas où Ω est connexe, voir poly de cours).

Soit $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega_T}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega_T)$ tel que $Lu = 0$ dans Ω_T. Soit $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ un point de maximum de u. Notons $M = u(x_0, t_0)$.

1. Soit $I = [(x_0, t_0), (x_1, t_1)]$ un segement inclus dans Ω_T avec $t_1 < t_0$. Montrer que u vaut M en tout point de I.

   Indication : on introduira

   $$\tau = \inf\{t \in [t_1, t_0] \,|\, u(y,s) = M \ \forall (y,s) \in I \ \textit{avec}\ t \leq s \leq t_0\}$$

   et, si $\tau > t_1$, on utilisera la formule de la moyenne sur une boule parabolique $B(z, \tau; r)$.

2. Montrer que u est constante sur $\overline{\Omega_{t_0}}$.

Exercice 2. (*Propriétés dispersives de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$P(x) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/4}$$

où $|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ est la norme euclidienne de x. Et pour tout $s > 0$, tout $x \in \mathbb{R}^n$, $P_s(x) = \frac{1}{s^n} P\left(\frac{x}{s}\right)$.

La solution fondamentale de l'équation de la chaleur est alors donnée par $E(x,t) = P_{\sqrt{t}}(x)$ pour $t > 0$.

1. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que $u(\cdot, t) = P_{\sqrt{t}} \star f$ est bien définie pour tout $t > 0$ et vérifie
$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$$
2. Montrer que si $p = \infty$, l'inégalité ne peut pas être améliorée.
3. Montrer que si $p = 1$, l'inégalité ne peut pas être améliorée.
4. Soit $p = 2$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^2} = 0$.
5. Soit $1 < p < \infty$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^p} = 0$.
   On pourra commencer par le cas $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
6. Montrer que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, tout $t > 0$, tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{t^{\frac{n}{2p}}} \|f\|_{L^p}.$$

Exercice 3. (*Preuve du principe du maximum en utilisant la multiplication par une fonction test*)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $T > 0$. Soit $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega_T}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega_T)$ tel que $Lu \leq 0$ dans Ω_T. On veut montrer que
$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u. \tag{1}$$

1. On note $M = \max\limits_{\Gamma_T} u$. Construire une fonction $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que
$$\phi(t) = 0 \text{ si } t \leq M, \text{ et } \begin{cases} \phi(t) > 0 \\ \phi'(t) \geq 0 \\ \phi''(t) \geq 0 \end{cases} \quad \text{si } t > M.$$
2. *Preuve dans le cas régulier.* On suppose de plus que Ω est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega_T})$.
   (a) On note pour tout $t \in [0, T]$,
   $$F(t) = \int_\Omega \phi(u(x, t))dx.$$
   Montrer que F est décroissante.
   (b) En déduire (1) dans ce cas.
3. *Cas général.* En admettant le lemme ci-dessous (voir preuve dans le poly), montrer (1) dans le cas général.

   Lemme. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Il existe une suite d'ouverts $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que*
   (i) $\forall j,\ \Omega_j \subset\subset \Omega_{j+1} \subset\subset \Omega$,
   (ii) $\lim\limits_{j \to \infty} \sup\limits_{x \in \partial\Omega_j} d(x, \partial\Omega) = 0$.

Equation des ondes

Dans la suite, on considère l'équation des ondes homogène

$$\begin{cases} \partial^2_{tt} u - \Delta_x u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,+\infty[\\ u_{|t=0} = g \\ \partial_t u_{|t=0} = h \end{cases}$$

où $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont données, $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 4. (*Cas n=1, formule de d'Alembert*)

1. On suppose que u est solution de l'équation des ondes dans le cas $n = 1$. On pose $v(x,t) = \partial_t u(x,t) - \partial_x u(x,t)$. Montrer que $\partial_t v(x,t) + \partial_x v(x,t) = 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto v(x+t,t)$ est constante. En déduire que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$,

$$v(x,t) = v(x-t,0) = h(x-t) - g'(x-t).$$

3. Par un raisonnement analogue, montrer la formule de d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy$$

4. Montrer le résultat suivant : *Supposons $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Si u est donné par la formule de d'Alembert , alors*
   (i) $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$
   (ii) $\partial^2_{tt} u - \partial^2_{xx} u = 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$
   (iii) $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0),t>0} u(x,t) = g(x_0)$, $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0),t>0} \partial_t u(x,t) = h(x_0)$ *pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. (*Equation des ondes sur* $\mathbb{R}^+$)

On considère l'équation des ondes suivante

$$\begin{cases} \partial^2_{tt} u - \partial^2_{xx} u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,+\infty[\\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \geq 0 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \geq 0 \end{cases}.$$

1. Soit u solution de l'équation des ondes ci-dessus. Prolonger u en une fonction $\tilde{u}$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et solution de l'équation des ondes sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ (prolonger de même les données initiales).
2. En utilisant la formule de d'Alembert pour $\tilde{u}$, montrer que $u(x,t)$ est donnée par la formule de d'Alembert pour $x > t$ et par

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(t+x) - g(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} h(y)dy \qquad \text{pour } x < t.$$

Exercice 6. (*Moyennes sphériques,* $n = 2, 3$)

1. On suppose que $u \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[)$ est solution de l'équation des ondes, avec $m \geq 2$. On pose pour $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} U(x,r,t) &= ⨍_{S(x,r)} u(y,t) d\sigma(y), \\ G(x,r) &= ⨍_{S(x,r)} g(y)\, d\sigma(y), \\ H(x,r) &= ⨍_{S(x,r)} h(y)\, d\sigma(y), \end{aligned}$$

   où l'intégrale "barrée" désigne la moyenne sur la sphère $S(x,r)$.
   Montrer que, pour x fixé, $U(x,\cdot,\cdot) \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[)$ et est solution de

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 \quad \text{dans } R^n \times [0, \infty[\\ U_{|t=0} = G \\ U_{t|t=0} = H \end{cases}.$$

2. Supposons $n = 3$, et $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty[)$. Ecrire le problème satisfait par $V(r,t) := r\, U(x,r,t)$. En déduire la solution de l'équation des ondes pour $n = 3$.
3. Résoudre l'équation des ondes pour $n = 2$ (se ramener au cas $n = 3$ en étudiant $\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t)$).