Université Lyon 1 Année 2013-2014
Master Mathématiques Générales 1ère année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

Feuille 8 - Espaces de Sobolev

Notations.

— I désigne l'intervalle $]-1,1[$,
— $1 \leq p < \infty$,
— f' désigne la dérivée généralisée de f,
— $W^{1,p}(I) := \{f \in L^p(I) \ ; \ f' \in L^p(I)\}$, muni de $\|f\|_{W^{1,p}} = (\|f\|_{L^p}^p + \|f'\|_{L^p}^p)^{1/p}$,
— $W_0^{1,p}(I)$ est l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ dans $W^{1,p}(I)$, muni de la norme induite de $W^{1,p}(I)$,
— pour $p = 2$, on note $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ et $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

Exercice 1.

1. Soit $u \in W^{1,p}(I)$. Montrer que pour tout $x, y \in I$,
$$u(y) = u(x) + \int_x^y u'(t)dt.$$
2. Montrer que $W^{1,p}(I) \hookrightarrow \mathcal{C}([-1,1])$, *i.e.* toute fonction $u \in W^{1,p}(I)$ est continue sur $[-1,1]$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}(I)$,
$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |u(x)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}}.$$
3. On suppose ici $1 < p < \infty$. Montrer que $W^{1,p}(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-1/p}([-1,1])$, *i.e.* toute fonction $u \in W^{1,p}(I)$ est $(1-1/p)$-höldérienne sur $[-1,1]$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}(I)$,
$$\sup_{\substack{x,\, y \,\in\, [-1,\, 1],\\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{1-1/p}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}.$$

Exercice 2. (*Exemples*)

Pour quelles valeurs de $p \in [1, \infty]$ les fonctions suivantes appartiennent-elles à $W^{1,p}(]0,1[)$? $W^{1,p}(]1,+\infty[)$?

— $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
— $x \mapsto |\ln x|^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

Soit $u \in W^{1,p}(I)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u(-1) = u(1) = 0$,
2. $u \in W_0^{1,p}(I)$,
3. le prolongement de u à $\mathbb{R}$ défini par $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Exercice 4. (*Intégration par parties*)

Soit $1 \leq p < \infty$.

1. Montrer que $\mathcal{C}^\infty(I)$ est dense dans $W^{1,p}(I)$.
   Indication. Pour $u \in W^{1,p}(I)$, on utilisera qu'il existe une suite $(w_n)_n$ de $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ qui converge vers u' dans $L^p(I)$.
2. Soit $u, v \in W^{1,p}(I)$. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ qui convergent vers u et v respectivement dans $W^{1,p}(I)$. Montrer que

$$u_n v_n \longrightarrow uv \text{ dans } L^p(I), \text{ et } (u_n v_n)' \longrightarrow u'v + uv' \text{ dans } L^p(I).$$

3. En déduire que $uv \in W^{1,p}(I)$.
4. Montrer que pour tout $u, v \in W^{1,p}(I)$, tout $x, y \in [-1, 1]$,

$$\int_I u(x)v'(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_I u'(x)v(x)dx.$$

Exercice 5. (*Inégalité de Poincaré*)

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(I)$,

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|u'\|_{L^p}.$$

Remarque. $\|u'\|_{L^p}$ *est donc une norme sur* $W_0^{1,p}(I)$*, équivalente à la norme initiale.*