Université Lyon 1 Année 2013-2014
Master Mathématiques Générales 1ère année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

**Feuille 7 - Équations de transport**

## I- Solutions classiques

**Exercice 1.** (*Equation de transport linéaire*)
On considère d'abord l'équation de transport linéaire et scalaire

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + c\,\partial_x u(t,x) = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où $c$ est une constante réelle non nulle, $u_0$ et $f$ deux fonctions données.

1. *Cas* $f = 0$. Montrer que si $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, il existe une unique solution classique $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ au problème (1), donnée par $u(t,x) = u_0(x - ct)$ pour tout $t \geq 0$, tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que si $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, il existe une unique solution classique $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ au problème (1), donnée par
$$u(t,x) = u_0(x - ct) + \int_0^t f\big(s, x - c(t-s)\big)ds$$
pour tout $t \geq 0$, tout $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 2.** (*Equation non linéaire*)
On considère maintenant l'équation non linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x\Big(F\big(u(t,x)\big)\Big) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

où $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions données. On suppose que $F$ est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et on note $c = F'$.

1. *Caractéristiques.* On suppose que $u$ est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de (2). On définit les courbes caractéristiques $X(t,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} \partial_t X(t,x) = c\big(u(t, X(t,x))\big), \\ X(0,x) = x \end{cases} \tag{3}$$
Calculer $u(t, X(t,x))$ puis $X(t,x)$ en fonction de $u_0$.

2. Dans la suite, on suppose que $u_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$, bornée et à dérivée bornée sur $\mathbb{R}$. On définit le temps $T^*$ par
$$T^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } c(u_0) \text{ croissante} \\ -\dfrac{1}{\inf_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}(c(u_0))} & \text{sinon} \end{cases} \tag{4}$$
Dessiner les caractéristiques dans le plan $(t, x)$ dans les deux cas, et interpréter géométriquement $T^*$.

3. Montrer qu'il existe $Y \in \mathcal{C}^1([0, T^*[\times\mathbb{R})$ tel que pour tout $t \in [0, T^*[$, tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in \mathbb{R}$,
$$y = X(t, x) \Longleftrightarrow x = Y(t, y).$$

4. Montrer qu'il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0, T^*[\times\mathbb{R})$ à (2).

5. Montrer que si $T^* < +\infty$, alors $\lim\limits_{t\to T^*} \|\partial_x u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = +\infty$.

6. *Un exemple.* On considère le cas $F(u) = u^2/2$ (équation de Burgers) et la donnée initiale
$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$
Dessiner la solution $x \mapsto u(t, x)$ pour différents temps $t \in [0, T^*[$.

## II- Solutions faibles

On s'intéresse aux équations de transport (1) et (2) pour des données qui ne sont pas régulières, par exemple $u_0$ seulement dans $L^\infty(\mathbb{R})$. On introduit alors une notion de solution faible.

**Définition**. *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On dit que $u$ est solution faible de (2) si $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$,*
$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \Big[u(t, x)\partial_t\varphi(t, x) + F(u(t, x))\partial_x\varphi(t, x)\Big] dxdt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0, x)dx = 0.$$

**Exercice 3.** (*Premières propriétés, cas linéaire*)

1. Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que
   (a) si $u$ est une solution classique alors $u$ est solution faible,
   (b) si $u$ est une solution faible et si de plus $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $u$ est solution classique.
2. *Cas linéaire.* Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Dans cette question, nous allons montrer que le problème (1) admet une unique solution faible donnée par $u(t, x) = u_0(x - ct)$.
   (a) Vérifier que $u(t, x) = u_0(x - ct)$ est bien solution faible de (1) sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
   (b) *Unicité.*

i. Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Montrer que l'on peut choisir $\varphi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que la solution de l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t,x) + c\,\partial_x \varphi(t,x) = \psi(t,x), \quad t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}, \\ \varphi(0,x) = \varphi_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

soit dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$

ii. En déduire l'unicité de la solution faible de (1).

**Exercice 4.** (*Cas non linéaire, problème de Riemann*)

On s'intéresse au problème de Riemann pour l'équation (2), *i.e.* au problème de Cauchy avec la donnée initiale suivante

$$u_0(x) = \begin{cases} k^- & \text{si } x < 0 \\ k^+ & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où $k^-$ et $k^+$ sont deux constantes réelles distinctes.

1. *Préliminaire.* Soit $V$ un ouvert inclus dans $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ une courbe régulière séparant $V$ en deux parties $V_g$ et $V_d$. On note $\nu = (\nu_t, \nu_x)$ la normale unitaire à la courbe $\mathcal{C}$, orientée de $V_g$ vers $V_d$. On suppose que, sur $V$, $u$ est de la forme

$$u(t,x) = \begin{cases} u_g(t,x) & \text{si } (t,x) \in V_g \\ u_d(t,x) & \text{si } (t,x) \in V_d \end{cases}$$

avec $u_g$ et $u_d$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer que si $u$ est solution faible de (2) alors

$$\begin{cases} \partial_t u_g(t,x) + \partial_x\Big(F\big(u_g(t,x)\big)\Big) = 0 & \text{dans } V_g \\ \partial_t u_d(t,x) + \partial_x\Big(F\big(u_d(t,x)\big)\Big) = 0 & \text{dans } V_d \\ \big(F(u_g) - F(u_d)\big)\nu_x + (u_g - u_d)\nu_t = 0 & \text{le long de } \mathcal{C} \end{cases}$$

On suppose de plus que la courbe $\mathcal{C}$ est paramétrée par $s : ]0,\infty[ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ : $\mathcal{C} = \{(t,x)\,|\, t > 0,\ x = s(t)\}$. Montrer que la dernière condition se réécrit

$$\frac{ds}{dt}(t) = \frac{F(u_g(t,s(t))) - F(u_d(t,s(t)))}{u_g(t,s(t)) - u_d(t,s(t))} \ \forall t > 0$$

appelée **condition de Rankine-Hugoniot**.
*Remarque. En général, le second membre dépend de $t$. La condition de Rankine-Hugoniot donne une équation différentielle sur $s(t)$.*

2. Dans la suite, on considère le cas particulier de l'équation de Burgers, *i.e.* $F(u) = \frac{u^2}{2}$.
   (a) $1^{er}$ *cas* : $0 \le k_+ < k_-$, *ondes de choc.*
   Déterminer $s(t)$ pour que $u(t,x) = \begin{cases} k^- & \text{si } x < s(t) \\ k^+ & \text{si } x > s(t) \end{cases}$ soit solution faible du problème de Riemann.

(b) $2^{ème}$ *cas* : $0 \leq k_- < k_+$, *ondes de détente.*
Dessiner les caractéristiques dans ce cas, et observer que la méthode des caractéristiques ne permet pas de déterminer la solution pour certaines valeurs de $(t, x)$.
Pour "combler ce vide", on cherche une solution sous la forme $u(t,x) = v\left(\frac{x}{t}\right)$ pour les valeurs de $(t,x)$ non atteintes par les caractéristiques (ce choix est motivé par le fait que l'équation est invariante par dilatation $(t,x) \to (at, ax)$). Déterminer une telle solution.

(c) Montrer que le choc suivant est aussi solution du problème de Riemann

$$u(t,x) = \begin{cases} k^- & \text{si } x < \sigma t \\ k^+ & \text{si } x > \sigma t \end{cases}, \text{où } \sigma = \frac{k_- + k_+}{2}.$$

(d) On vient de voir qu'il n'y a pas unicité des solutions faibles. Pour garantir l'unicité, il faut imposer des conditions supplémentaires sur la solution, ce qui revient à introduire une notion intermédiaire de solutions dites *entropiques.*
**Définition**. *On dit que $u$ est solution entropique de (2) si $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ <u>positive</u>, pour toute entropie $\eta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ <u>convexe</u> et pour toute $\theta$ telle que $\theta' = F\eta'$,*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \eta(u(t,x))\partial_t\varphi(t,x) + \theta(u(t,x))\partial_x\varphi(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\varphi(0,x)dx \geq 0.$$

Le théorème de Kruzkhov (difficile) assure l'existence et l'unicité d'une solution entropique pour toute donnée initiale $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

i. Montrer que si $u$ est solution classique alors $u$ est solution entropique
ii. Vérifier que les solutions obtenues aux questions 2a) et 2b) sont bien les solutions entropiques.
iii. Déterminer la solution entropique de l'équation de Burgers avec donnée initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**Exercice 5.** (*Equations de transport : inégalité d'Oleinik*)
Dans cet exercice, on s'intéresse encore à l'équation (2).
On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F''(x) \geq \alpha$.

1. *Préliminaire 1.* Soit $\beta$ un réel $> 0$. On considère l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) = -\beta v(t)^2, \ t \geq 0 \\ v(0) \in \mathbb{R} \text{ donné.} \end{cases} \tag{5}$$

(a) Montrer que pour toute donnée initiale $v(0)$ l'équation (5) admet une unique solution définie sur un intervalle maximal $[0, T[$.

   (b) Calculer explicitement cette solution ainsi que $T$ en fonction de $\beta$ et $v(0)$.

2. *Préliminaire 2.*
   (a) Montrer que $c$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On notera $g$ son inverse.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \leq \dfrac{1}{\alpha}$.

3. *Solutions classiques.* On suppose dans cette question que $u_0$ est de classe $\mathcal{C}^2$, bornée et à dérivée $u_0'$ bornée sur $\mathbb{R}$. On suppose que $u$ est une solution de classe $\mathcal{C}^2([0, T^*[\times\mathbb{R})$ de (2) (où $T^*$ est défini par (4)).
   (a) Ecrire l'équation satisfaite par $\partial_x u(t, x)$.
   (b) On fixe $x \in \mathbb{R}$. On pose $v(t) = \partial_x u(t, X(t, x))$ Montrer que $v$ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) = -F''(u_0(x))v(t)^2, \\ v(0) = u_0'(x). \end{cases} \tag{6}$$

   En déduire l'expression de $v$ en fonction de $x, u_0, f$. Vérifier que cette solution est bien définie sur $[0, T^*[$ et montrer que

$$v(t) \leq \frac{1}{\alpha t} \quad \forall t \in ]0, T^*[.$$

   (c) Montrer que pour tout $t \in ]0, T^*[$, tout $x \in \mathbb{R}$, $\partial_x u(t, x) \leq \dfrac{1}{\alpha t}$.
   (d) En déduire que pour tout $t \in ]0, T^*[$, il existe une constante $C(t) \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x > y$,

$$u(t, x) - u(t, y) \leq C(t)(x - y). \tag{7}$$

   *On dit que $u$ satisfait une inégalité d'Oleinik.*

4. *Solutions faibles.* On considère la donnée initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{8}$$

   (a) On suppose d'abord $u_g > u_d$. Montrer que la solution *onde de choc* (dont on donnera l'expression) satisfait une inégalité d'Oleinik.
   (b) On suppose dans la suite de l'exercice que $u_g < u_d$. Montrer que dans ce cas la solution faible "onde de choc" ne satisfait pas d'inégalité d'Oleinik.
   (c) Calculer la solution *onde de détente*. Montrer qu'elle satisfait une inégalité d'Oleinik.
   *On pourra utiliser le préliminaire 2.*