# SOLUTIONS SUGGEREES PAR LA TRANSFORMEE DE FOURIER

$f \in L^1 \Rightarrow \mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$

3 propriétés fondamentales :

$$\widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$$

$$\widehat{x_j f}(\xi) = i\partial_j \hat{f}(\xi)$$

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}\,\hat{g}(\xi)$$

# Equation de la chaleur

$$\begin{cases} Lu = u_t - \Delta_x u = 0 & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u\big|_{t=0} = f \end{cases}$$

$$v(\xi,t) = \left(\mathcal{F}_x\, u(\cdot,t)\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\, u(x,t)\, dx.$$

"$\Longrightarrow$"

$$\begin{cases} v_t(\xi,t) + |\xi|^2 v(\xi,t) = 0 \\ v(\xi,0) = \hat{f}(\xi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(\xi,t) = \hat{f}(\xi) e^{-t|\xi|^2} \text{ "}\Rightarrow\text{"}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$$

$$\boxed{K(x,y,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}, \quad t>0}$$

(noyau de la chaleur

Educated guess:

$$(1)\quad u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t) f(y)\, dy, & t>0 \\ f(x) & , t=0 \end{cases}$$

$\boxed{\underline{\text{Thm}}}$ a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour un $1 \le p \le \infty$, alors $Lu = 0$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$.

b) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty \Rightarrow$

$$\lim_{t \to 0} u(\cdot, t) = f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n)$$

c) Si $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ et

$$\lim_{t \to 0} u(\cdot, t) = f \text{ uniformément}$$

sur les compacts.

Etape 1. $Lu = 0$ ds $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$.

a) $(\partial_t - \Delta_x) K(x,y,t) = 0$ ✓

b) $Lu = L_{(x,t)} \left( \int K(x,y,t) f(y)\, dy \right)$

$$\overset{\uparrow}{=} \int \left[ L_{(x,t)} K(x,y,t) \right] f(y)\, dy = 0.$$

On différentie sous le signe $\int$

$\boxed{\text{Lemme.}}$

$\forall L \subset\subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$,

$\exists C, a > 0$ tq

$$|D^k_{(x,t)} K(x,y,t)| \leq C_k e^{-a|y|^2}.$$

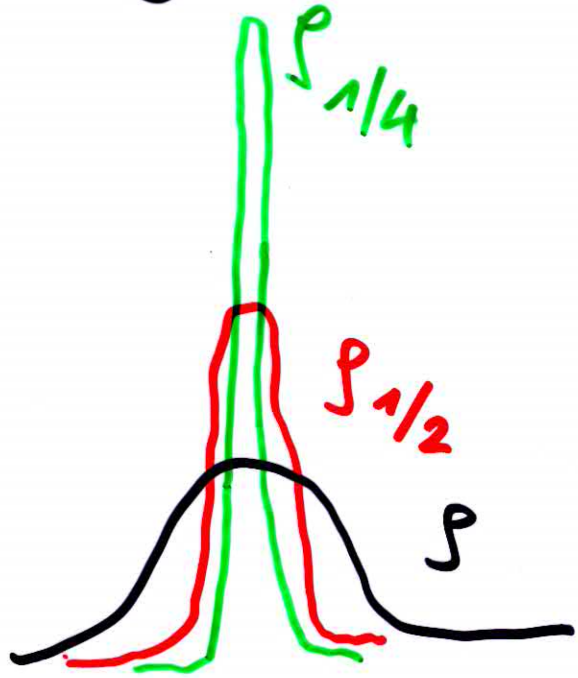
# Digression : noyaux régularisants

$$\rho \in L^1(\mathbb{R}^n), \ \rho \geq 0, \ \int \rho = 1$$

(voir + si affinités :

$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \rho \subset B(0,1)$)

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\, \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$



# Thm d'approximation

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon * f = f$$

a) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, ds $L^p$

b) $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $*$-faible

c) $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$, UC

d) $f \in C_b$ + uniformément continue,

uniformément

càd ds $L^\infty$

Etape 2. Etude de $u(\cdot,t)$, $t \downarrow 0$

$$\rho(x) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$$

$$\Longrightarrow u(x,t) = \rho_{\sqrt{t}} * f\,(x)$$

$\Longrightarrow$ toutes les convergences de l'énoncé

# Equation des ondes 1D

$$\begin{cases} \Box u = u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{ds } \mathbb{R}^2 \\ u\big|_{t=0} = f & \text{ds } \mathbb{R} \\ u_t\big|_{t=0} = g & \text{ds } \mathbb{R} \end{cases}$$

Transformée de Fourier en $x$ :

$$v(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x,t)\, dx \quad \text{"}\Longrightarrow\text{"}$$

$$\begin{cases} v_{tt} + \xi^2 v = 0 & \text{ds } \mathbb{R}^2 \\ v(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) & \text{ds } \mathbb{R} \\ v_t(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi) & \text{ds } \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$v(\xi,t) = C(\xi)\cos\xi t + D(\xi)\sin\xi t$$

$$\Rightarrow \quad v(\xi,t) = \cos\xi t\,\hat{f}(\xi) + \frac{\sin\xi t}{\xi}\hat{g}(\xi)$$

$\boxed{\text{Exo}}$

$$\widehat{f(\cdot - h)}(\xi) = e^{-ih\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$$

$$\Rightarrow \cos\xi t\,\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\left[e^{i\xi t} + e^{-i\xi t}\right]\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\widehat{\left[f(x+t) + f(x-t)\right]}(\xi)$$

$\boxed{\text{Exo}}$

$$\widehat{1\!\!1_{[a,b]}}(\xi) = \frac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{-i\xi}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \xi t}{\xi} = \frac{1}{2} \widehat{\frac{e^{-i\xi t} - e^{i\xi t}}{-i\xi}}$$

$$= \frac{1}{2} \widehat{\mathbb{1}_{[-t,t]}}(\xi)$$

Educated guess

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[ f(x+t) + f(x-t) \right]$$

$$(1) \quad + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy$$

<u>Prop.</u> (immédiate) Si $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow$ (1) donne la solution du pb.

# Commentaires

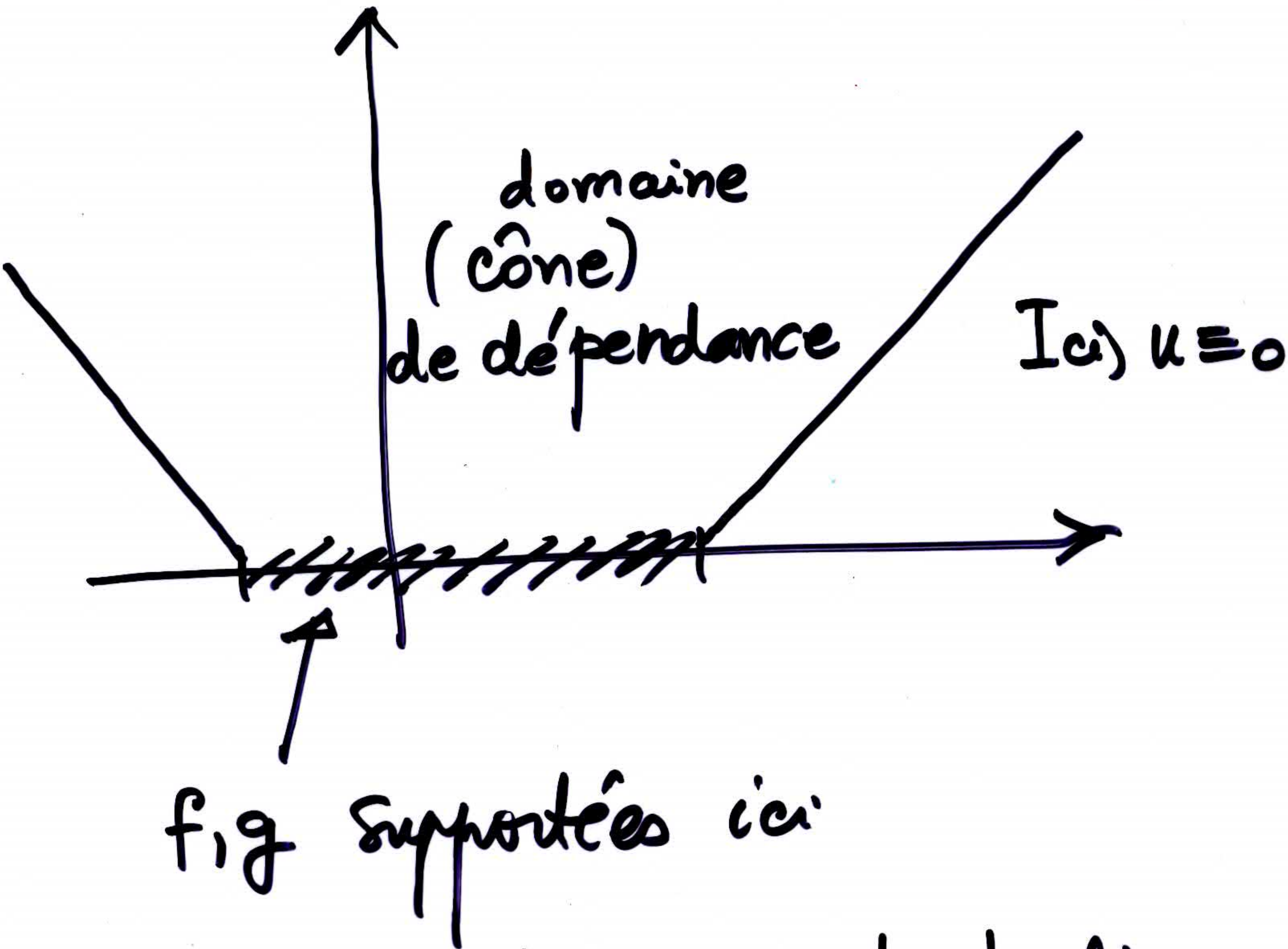
1) Temps reversible dans $\square$ (et dans Schrödinger) ; pas dans L.

Lien

2) Effet régularisant dans L : $u \in C^\infty$ si $t > 0$. Pas dans $\square$.

Philosophie générale : régularisant $\Longrightarrow$ irréversible

3) L'équation des ondes se propage à vitesse finie :




On le montrera en toute dimension.

# EQUATION DE LAPLACE DANS UN DEMI-PLAN

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0 & \text{ds } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = f(x) & \text{ds } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \begin{cases} v_{tt} - \xi^2 v = 0 \\ v(\xi,0) = \hat{f}(\xi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(\xi,t) = C(\xi)e^{-\xi t} + D(\xi)e^{\xi t}$$

$$\text{"}\Rightarrow\text{"} \quad v(\xi,t) = E(\xi)e^{-|\xi|t}$$

$v$ est "petite"

$$\Rightarrow v(\xi,t) = e^{-|\xi|t}\hat{f}(\xi)$$

---

$$e^{-|\xi|t} = \mathcal{F}(?)$$

Inversion de Fourier "$\Rightarrow$"

$$P(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-|\xi| t} \, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2+x^2}.$$

Educated guess

$$u(x,t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} P(x-y,t) f(y)\,dy, & t>0 \\ f(x), & t=0 \end{cases} \quad (1)$$

$P$ = noyau de Poisson

Raisonnement analogue en dimension $\geq 3$ :

$$v(\xi, t) = e^{-|\xi| t}\, \hat{f}(\xi) \overset{\text{"}}{=}\!\!\overset{\text{"}}{>}$$

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x-y, t)\, f(y)\, dy,$$

avec

$$P(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i x \cdot \xi}\, e^{-|\xi| t}\, d\xi$$

$\Downarrow$ calcul en coordonnées sphériques généralisées

$$P(x,t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{t}{\left(t^2 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

(le cas précédent : $n = 1$)

$\uparrow$ Question en DM

$n \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} P(x-y,t)\, f(y)\, dy, & t > 0 \\ f(x), & t = 0 \end{cases}$$

$$P(x,t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{t}{\left(t^2 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

<u>Thm.</u> Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors

a) $\Delta u = 0$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$

b) $u \in C^\infty$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$

c) $\lim\limits_{t \to 0} u(\cdot, t) = f$ au sens du Thm sur l'équation de la chaleur.

$\boxed{\text{Preuve}}$ Soit

$$\rho(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

<u>Lemme</u>. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$

<u>Preuve</u> : En coordonnées sphériques généralisées + l'identité $\boxed{\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}}$

on est ramené à

$$\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{\left(1+r^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,dr = \frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \checkmark$$

$\square$

Lemme $\Longrightarrow$

$$u(x,t) = (\rho_t * f)(x).$$

On conclut comme dans le thm sur L. $\square$

# $\boxed{\text{Equation de Schrödinger dans le demi-espace}}$

$$\begin{cases} u_t - i\,\Delta u = 0 & \text{ds } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u\big|_{t=0} = f \end{cases}$$

temps reversible, comme pour $\Box$

"$\Longrightarrow$" $v(\xi, t) = e^{-it|\xi|^2} \hat{f}(\xi)$ "$\Longrightarrow$"

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x-y, t) f(y)\, dy, \text{ où}$$

$$\mathcal{F}_x P(\cdot, t)(\xi) = e^{-it|\xi|^2}.$$

$P(\cdot, t)$ n'est pas une fonction de $L^1$ !

$$\left| \mathcal{F}_x P(\cdot, t)(\xi) \right| = 1 \underset{|\xi| \to \infty}{\not\to} 0$$

impossible si $P(\cdot, t) \in L^1$ (Riemann-Lebesgue)

---

$\mathcal{F}$ au-delà de $L^1$ ?

$\boxed{\text{Thm Plancherel}}$

$$L^1 \cap L^2 \ni f \overset{T}{\longmapsto} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \widehat{f}$$

$$\in L^\infty \boxed{\cap L^2}$$

$T$ s'étend à un unitaire

$$L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$T^{-1} = T^*$$

**Concrètement**

$$L^1 \cap L^2 \xrightarrow{S} L^2$$
$$f \longmapsto \hat{f}$$

$$L^1 \cap L^2 \xrightarrow{V} L^2$$
$$f \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow S, V$ s'étendent à $L^2$ et
$$V = S^{-1}$$

Ne sert pas dans notre cas.

Ce qui sert : transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$

espace plus grand que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

dual de $\mathcal{S}$ = espace des "distributions tempérées"

Approche ad hoc : approximer le problème

$$u_t - i\Delta u = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} u^\varepsilon_t - (i+\varepsilon)\Delta u^\varepsilon = 0, & t > 0 \\ u^\varepsilon_t - (i-\varepsilon)\Delta u^\varepsilon = 0, & t < 0 \end{cases}$$

Par ex. $t > 0$ :

$$\begin{cases} u^\varepsilon_t - (i+\varepsilon)\Delta u^\varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon\big|_{t=0} = f \end{cases} \Rightarrow$$

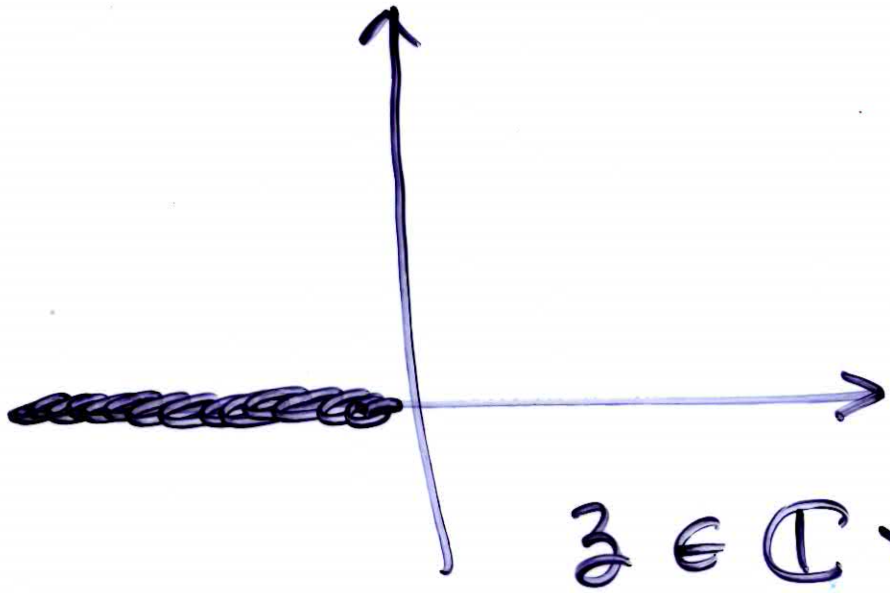
$$v^\varepsilon(\xi, t) = e^{-(i+\varepsilon)t|\xi|^2}\hat{f}(\xi)$$

$$\text{"}\Rightarrow\text{"} \quad u^\varepsilon(x,t) = \int P_\varepsilon(x-y,t) f(y)\,dy, \text{ où}$$

$$\begin{cases} P^\varepsilon(x,t) = \dfrac{1}{\left[\sqrt{4\pi(i+\varepsilon)t}\right]^n} e^{-\frac{|x|^2}{4(i+\varepsilon)t}} \\ \\ \mathcal{F}_x P^\varepsilon(\cdot,t)(\xi) = e^{-(i+\varepsilon)t|\xi|^2} \end{cases}$$

---

$\sqrt{z}$ = racine complexe principale



$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

$$\boxed{\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}} \Longleftarrow \left| \begin{array}{l} z = r e^{i\theta},\ r > 0 \\ \theta \in (-\pi, \pi) \end{array} \right.$$

fonction holomorphe

---

$\varepsilon \longrightarrow 0, \quad t \neq 0 \rightsquigarrow$

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left[\sqrt{4i\pi t}\right]^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}} f(y)\,dy, & t \neq 0 \\[2ex] f(x), & t = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Prop}}$ $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

a) $u$ vérifie $\quad i u_t + \Delta_x u = 0$ ds

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$

b) $\lim_{t \to 0} u(\cdot, t) = f$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

<u>Preuve</u> : $\quad$ a) ✓

b) Par ex. $t > 0$ :

#1

- $\mathcal{F}_x u^\varepsilon(\cdot, t)(\xi) = e^{-(i+\varepsilon)t|\xi|^2} \hat{f}(\xi)$

TCD $\Rightarrow \mathcal{F}_x u^\varepsilon(\cdot, t) \to g$ ds $L^2$

#2

- $u^\varepsilon(x, t) \longrightarrow u(x, t)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u(\cdot,t) \in L^2 \\ \mathcal{F}_x u(\cdot,t)(\xi) = e^{-it|\xi|^2} \hat{f}(\xi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \| u(\cdot,t) - f \|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2}$$

$$\| (e^{-it|\xi|^2} - 1) \hat{f}(\xi) \|_{L^2} \xrightarrow{\text{TCD}} 0 \quad \square$$

# Résolvante du laplacien

$$\lambda u - \Delta u = f \quad \text{ds } \mathbb{R}^n$$

$\Big\Updownarrow$ Transformée de Laplace

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 \\ u\big|_{t=0} = f \end{cases}$$

Laplace: $\mathcal{L} f(\sigma) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\,dt$

si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$.

Comme $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ transforme dérivées en multiplication

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & \Big| e^{-\lambda t}, \int_0^\infty \\ u\big|_{t=0} = f \end{cases}$$

$$\text{"}\Rightarrow\text{"} \int_0^\infty e^{-\lambda t} u_t(x,t)\,dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Delta_x u(x,t)\,dt \underset{=0}{}$$

$$\Rightarrow \lambda v(x) - \Delta v(x) = f(x),$$

où $v(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(x,t)\,dt$

Educated guess

$$u(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \times$$

(1)

$$e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,dy\,dt$$

**Prop.** $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow$

$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifie le pb.

**Preuve :** $K(x) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dt$

Tonnelli : $K$ mesurable

$K \in L^1$

Fubini + $\mathcal{F}$ gaussiennes $\Rightarrow$

$$\hat{K}(\xi) = \frac{1}{\lambda + |\xi|^2}.$$

Rq : $f \in L^1_{loc} \Rightarrow f * \varphi \in C^\infty$

$\varphi \in C_c^\infty$

et $\partial^\alpha (f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi$.

$$\widehat{\lambda w - \Delta w} = \widehat{K * (\lambda f - \Delta f)}$$

$$= \hat{K} \; \widehat{\lambda f - \Delta f} = \hat{K} \, (\lambda + |\xi|^2) \hat{f}$$

$$= \hat{f} \quad \Longrightarrow \quad \lambda w - \Delta w = f.$$

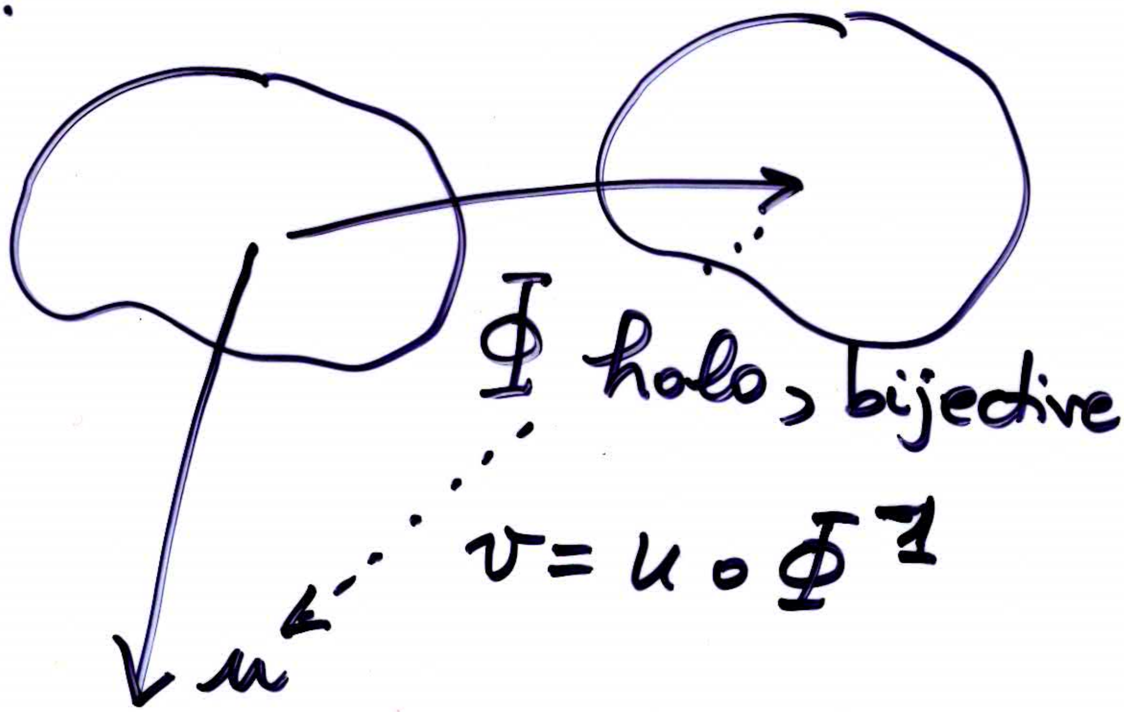
$\mathcal{F}$ injective sur $L^1$

# Equation de Laplace dans une boule

Digression :

## représentation conforme

Plan :



$$\Delta u = 0 \iff \Delta v = 0$$

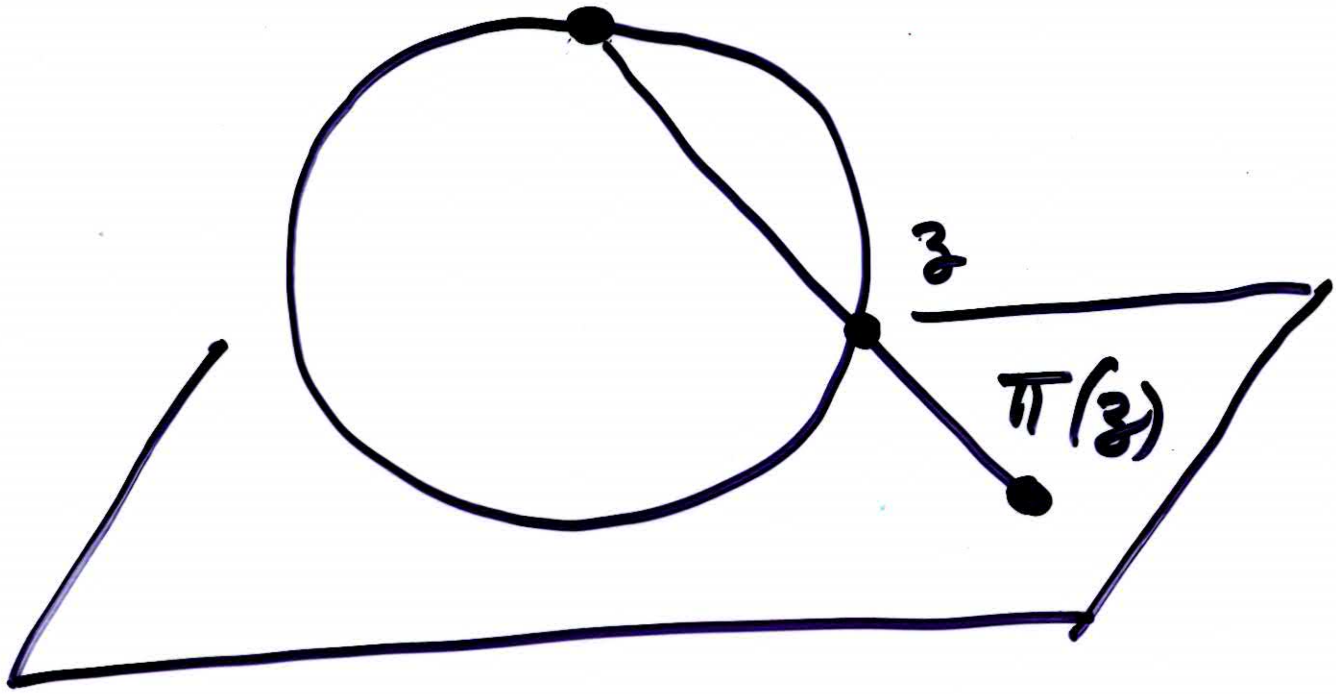
(avatar du fait que la composée de deux f^ns holomorphes est holomorphe)

<u>$n \geq 3$</u> ? Très peu de représentations conformes

$\boxed{\text{Thm Liouville}}$ Il n'y a que

- homothéties
- translations
- inversions

Cas particulier : projection stéréographique sur le bord :




$$\Pi : \begin{cases} \text{sphère} \longrightarrow \text{plan} \\ \text{boule} \longrightarrow \text{demi-espace} \end{cases}$$

**Educated guess**

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x - x_0|^2}{\sigma_n R} \displaystyle\int_{S(x_0,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma(y) , & x \in B(x_0, R) \\ f(x) , & x \in S(x_0, R) \end{cases}$$

vérifie

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{ds } B(x_0, R) \\ u = f & \text{sur } S(x_0, R) \end{cases}$$

**Thm (Poisson)** Si $f \in C(S(x_0,R))$

$\Rightarrow u \in C^2(B(x_0,R)) \cap C(S(x_0,R))$

solution du pb.

OPS $x_0 = 0$

**Preuve :** $u \in C^\infty$, $\Delta u = 0$ ✓

$$P(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R\,|x-y|^n}$$

$$S(x) = \int_{S(0,R)} P(x,y)\, d\sigma(y).$$

Etape 1. $S \equiv 1$

Preuve : • $S(Ax) = S(x)$, $\forall A \in \mathcal{O}(n)$

• $S(x) = f(|x|)$, où $f(r) = S(r, 0, \dots, 0) \in C^\infty$

• $\Delta S = f''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} f'(|x|)$

• $\Rightarrow f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0$, $r > 0$

$\Rightarrow \left(r^{n-1} f'\right)' = 0 \Rightarrow r^{n-1} f' = 0$

$\Rightarrow f = \text{cste} \Rightarrow S(x) = S(0) = 1.$

$\square$

**Etape 2.** $x \in B(0,R)$, $z \in S(0,R)$,

$$\lim_{x \to z} \int_{|y-z|>\delta} P(x,y)\, d\sigma(y) = 0, \quad \forall \delta > 0$$

$\square$

**Etape 3 :** $\lim_{x \to z} u(x) = f(z)$ :

Technique de découpage :

$$\int_{|y-z|>\delta} \ldots \quad \text{et} \quad \int_{|y-z|\leq\delta} \ldots .$$

$\square$