Captatio benevolentiae :
bullons

Les équations aux dérivées partielles :

questions

outils

réponses

D'aprés
Frank MORGAN
Geometric Measure Theory.
A Beginner's Guide, 2009

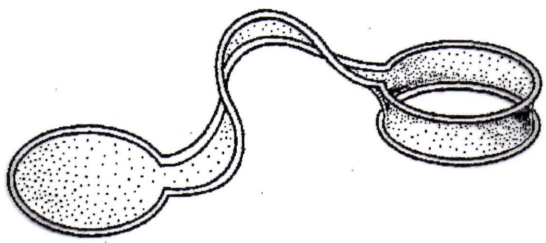


Figure 1.1.1. The surface of least area bounded by two given Jordan curves.

Figure 1.2.1. Surface realized as a mapping, f, of the disc.

1. UN EXEMPLE : THÉORIE DES SURFACES MINIMALES

2

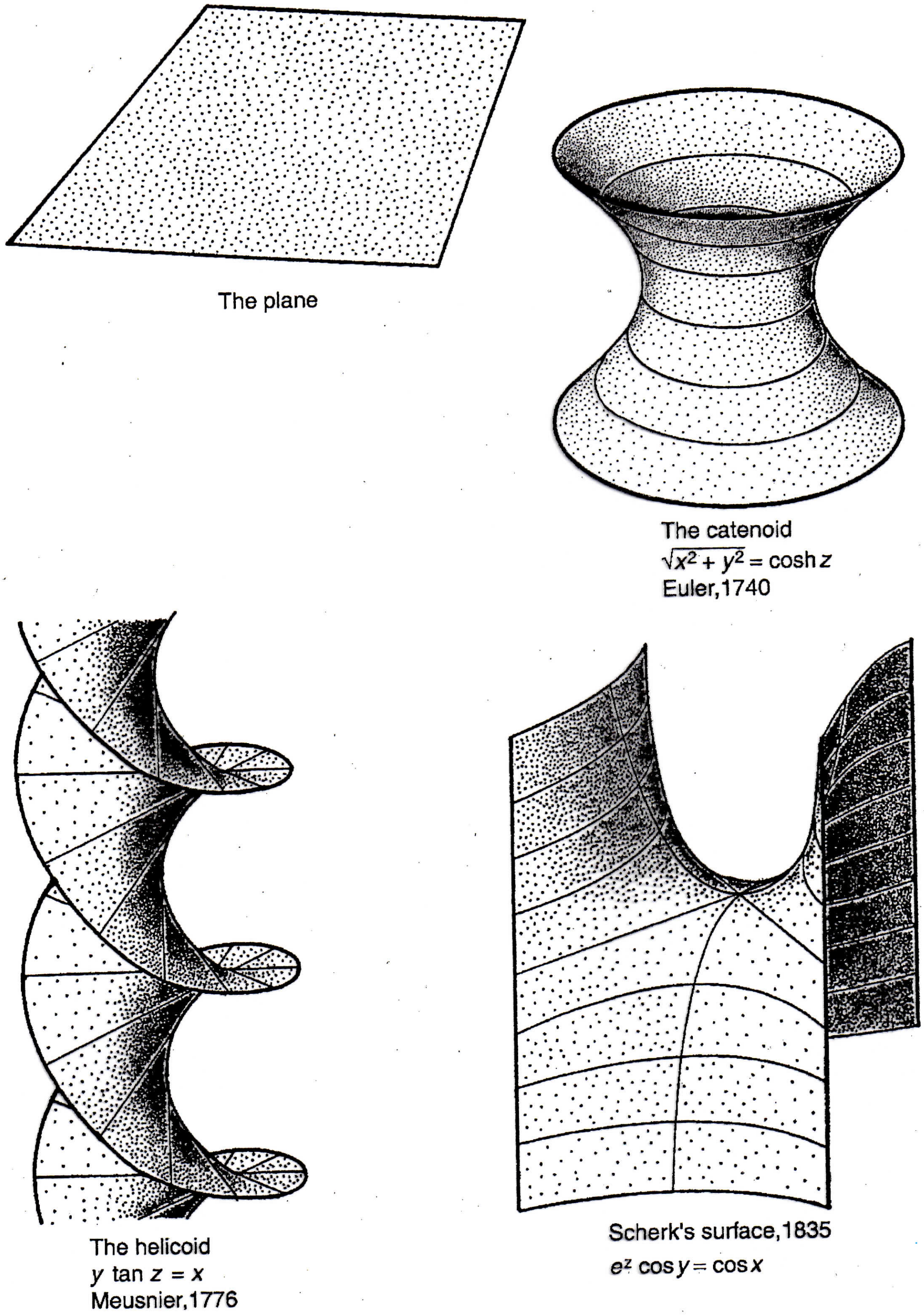
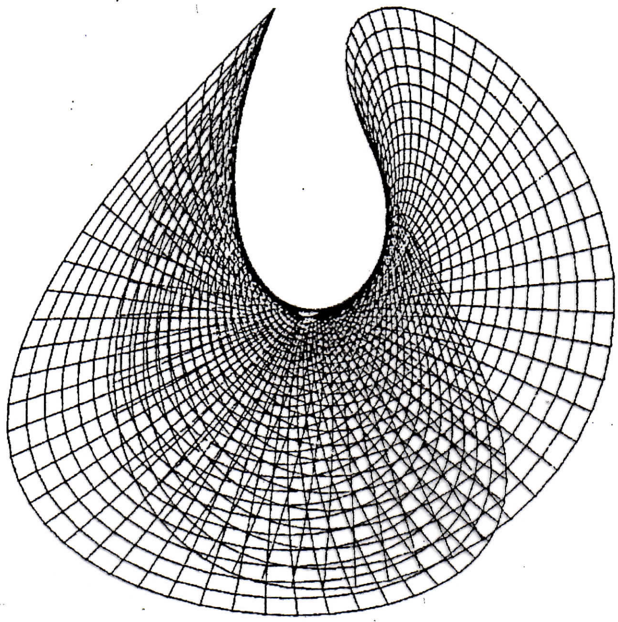


Figure 6.1.1. Some famous minimal surfaces.

3



$$x = \mathrm{Re}(w - \tfrac{1}{3}w^3)$$
$$y = \mathrm{Re}(i(w + \tfrac{1}{3}w^3))$$
$$z = \mathrm{Re}(w^2) \quad w \in \mathrm{C}$$

Figure 6.1.2. Enneper's surface, 1864.

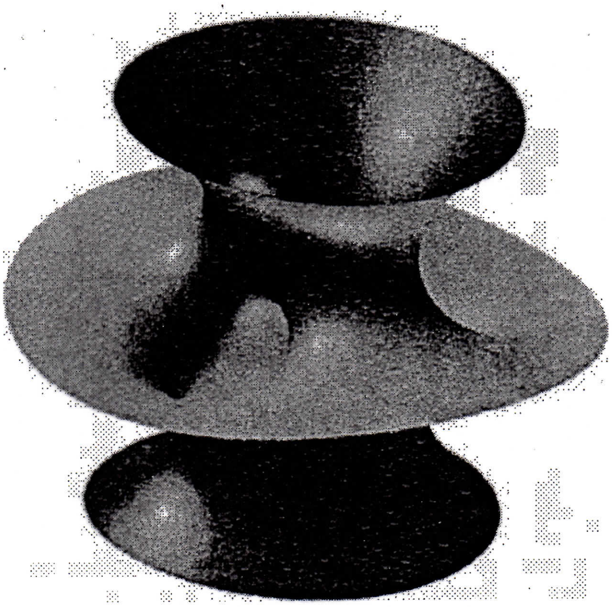


Figure 6.1.3a. The first modern complete, embedded minimal surface of Costa and Hoffman and Meeks (also see Hoffman). Courtesy of David Hoffman, Jim Hoffman, and Michael Callahan.

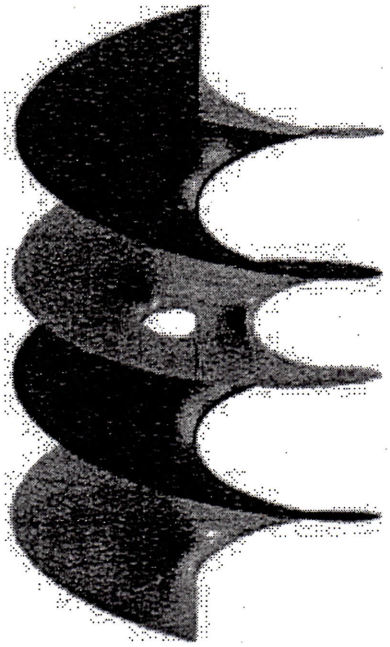


Figure 6.1.3b. One of the latest new complete, embedded minimal surfaces: the genus one helicoid, discovered by David Hoffman, Hermann Karcher, and Fusheng Wei (1993). Proved embedded by Weber, Hoffman, and Wolf. Computer-generated image by James T. Hoffman at the GANG Laboratory, University of Massachusetts, Amherst. Copyright GANG, 1993.

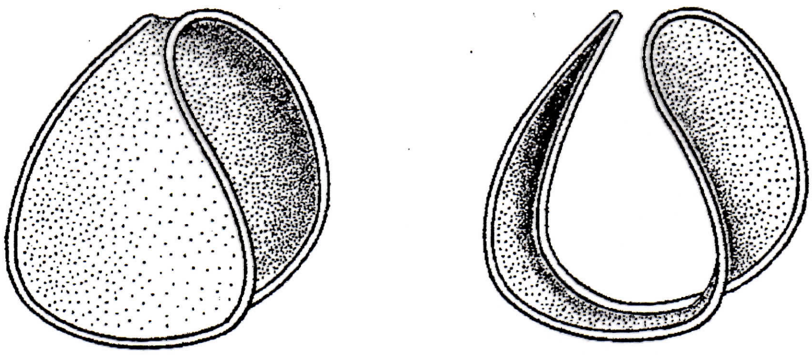


Figure 6.1.4. Area-minimizing surfaces with the same boundary as Enneper's surface.

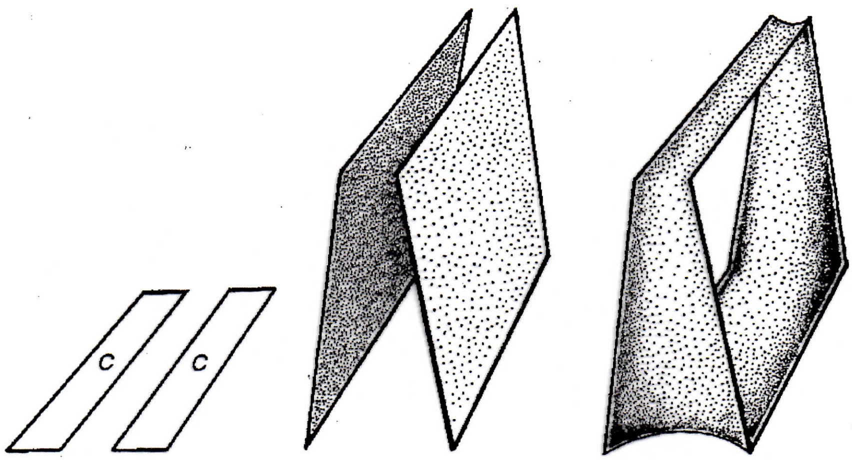
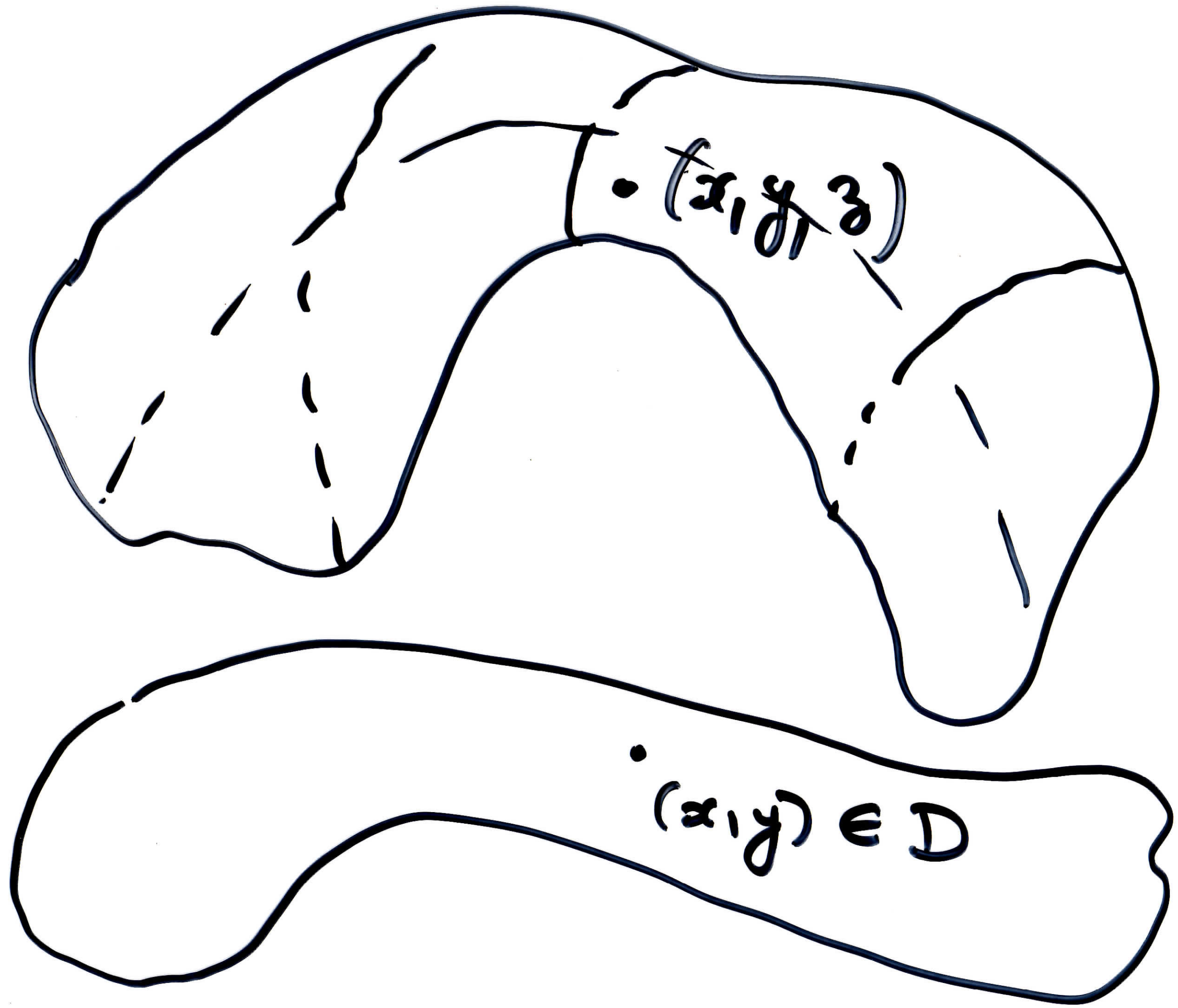


Figure 6.1.5. A minimal graph over a *nonconvex* region C need not be area minimizing. The second surface has less area.

Etude de cas : équation des surfaces minimales

Surface paramétrée (la plus simple) :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = u(x,y) \end{cases}$$



$u \in C^2$

$D \subset \mathbb{R}^2$

Bord fixé :

u donnée sur ∂D

$u = u_0$ sur ∂D

$\boxed{\text{Aire}}$: $\mathcal{A} = \mathcal{A}(u) = \displaystyle\int_D \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx\, dy$,

$\nabla u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Problème satisfait par } u}$: $\displaystyle \min_{u = u_0 \text{ sur } \partial D} \int_D \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$

Pb variationnel (= d'optimisation)
contraint

$\longrightarrow$ Equation aux dérivées partielles (EDP)
avec des conditions aux limites (CL)

En faisant de petites variations (= calcul des variations)

$$\Rightarrow \int_D \frac{\nabla u \cdot \nabla \varphi}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0 \, , \forall \varphi \in C_c^2(D)$$

formulation variationnelle

Formule d'intégration par parties (IPP)

Sous hypothèses de régularité

$$\int_\Omega f g_x = \int_{\partial\Omega} \nu_x f g \, d\sigma - \int_\Omega f_x g$$

$$\Rightarrow \boxed{-\int_D \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)\varphi = 0, \ \forall \varphi \in C_c^2(D)}$$

où $\operatorname{div} F = \partial_1 F_1 + \ldots + \partial_n F_n$

champ de vecteurs : $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Principe de localisation

$f \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\int_\Omega f\varphi = 0, \ \forall \varphi \in C_c(\Omega) \Rightarrow f = 0.$

Donc $\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 & \text{dans } D \\ u = u_0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$

EDP

CL

la surface s'appuie sur une courbe Γ

<u>Thm</u> (Douglas, Rado, 1930) Si Γ est une courbe de Jordan, alors il existe une surface minimal s'appuyant sur Γ.

Thm (Fleming 1962, Almgren 1966, Simons 1968; Bombieri, De Giorgi, Giusti 1969)

"Avec les mains"

Ceci reste vrai en dimension $n \leq 7$, mais faux en dimension $n \geq 8$

Outils / approche

"programme de Hilbert"

(apocryphe ....)

Programme de Hilbert

• élargir le cadre fonctionnel : accepter des compétiteurs moins réguliers que les surfaces paramétrées

Théorie géométrique de la mesure (Hausdorff, Whitney, FEDERER)

• obtenir l'existence d'un minimum Méthode directe

• prouver la régularité de la solution

Théorie de la régularité (Bernstein, ..., FEDERER, ALMGREN)

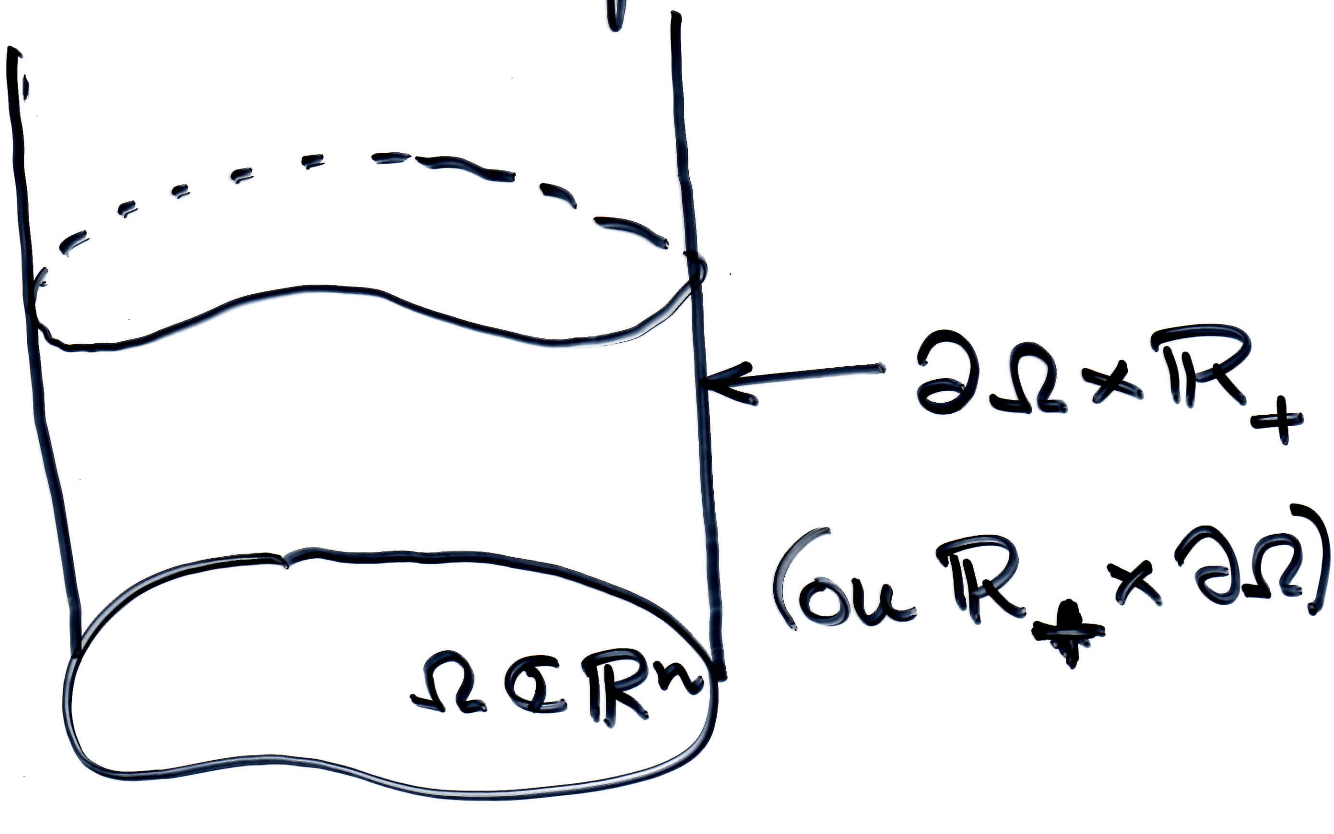
2. Les équations les plus simples

a) Equation de la chaleur

$u = u(t, x)$ = température

temps

coordonnées spatiales



EDP

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(t,x) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ u(t,x) = v(t,x) & , t \geq 0, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

CL

Condition initiale (CI)

CL de Dirichlet : on prescrit (mesure) la température au bord

Variante :

CL : $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_x}(t,x) = v(t,x)$: on prescrit le flux de chaleur au bord

b) Equation de Laplace (Poisson)

Décrit les états d'équilibre thermiques

EDP $\longrightarrow$ $-\Delta u = f(x)$ dans Ω

Trois conditions aux limites usuelles

Dirichlet : $u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega$

Neumann : $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega$

Robin : $a(x)\,u(x) + \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega$

c) Equation de Schrödinger

EDP $i\,u_t + \Delta_x u = V(t,x)\,u$

V : potentiel

$u = u(t,x)$; $|u|^2$ est une densité.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2(t,x)\,dx = 1$$

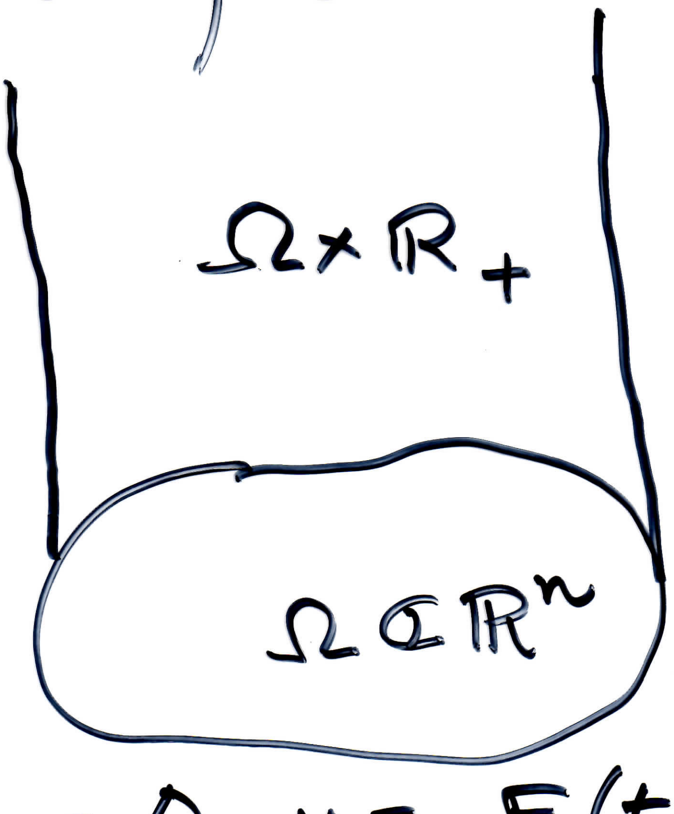
CI $\quad u(0,x) = u_0(x)$

d) Equation des ondes

$u = u(t, x)$ = petites vibrations

temps — coordonnées spatiales

longitudinales d'une corde, surface etc. élastique



$$
\begin{array}{ll}
\text{EDP} & \left\{ \begin{array}{l}
u_{tt} - \Delta_x u = F(t, x) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\
\end{array} \right. \\
\text{CI} & \quad u|_{t=0} = u_0 \\
\text{CI} & \quad u_t|_{t=0} = v_0 \\
\text{CL} & \quad u(t, x) = v(t, x), \quad t \geq 0, \ x \in \partial\Omega
\end{array}
$$

e) Equation de transport

$u = u(t,x)$ = vitesse des voitures

temps ← t, x → coordonnées spatiales

EDP $\quad u_t + \mathrm{div}_x [f(u)] = F(t,x)$

CI $\quad u|_{t=0} = u_0$

Et bien d'autres....

Voir Lawrence Evans,

Partial Differential Equations,
2010

p. 3 – 6
(et la référence à
Zwillinger)

Classification

- $u_t + \mathrm{div}_x\,(f(u)) = 0$ — du 1^{er} ordre

  théorie locale ✓
  théorie globale .....

- $\Delta u = 0$ — 2^{nd} ordre, linéaire, à coefficients constants

"Symbole" : $x_1^2 + \ldots + x_n^2$

$n=2$: $x_1^2 + x_2^2 =$ cste $\rightarrow$ cercle

Equation elliptique

- $\partial_t u - \Delta_x u = Lu = 0$ — Parabolique

- $\partial_t^2 u - \Delta_x u = \Box u = 0$

  Hyperbolique